ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

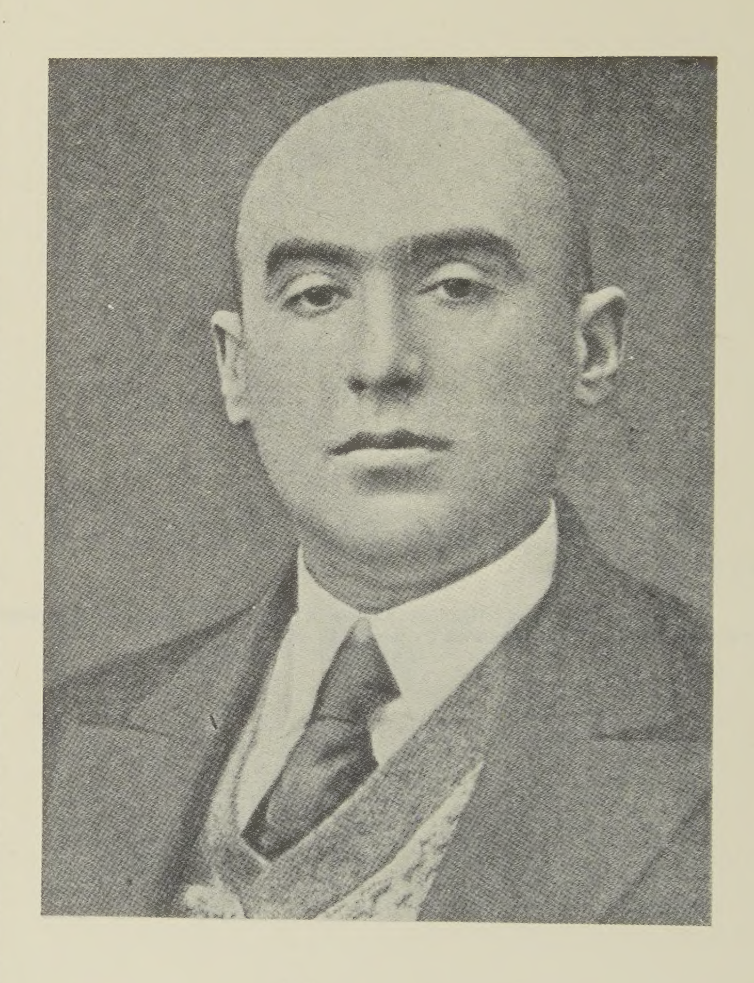
SÉRIE MATHÉMATIQUE

№ 5–6

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва ★ 1938





15/I 1905—24/IX 1938

Редакция с глубоким прискорбием извещает о смерти выдающегося советского математика, члена-корреспондента Академии Наук СССР, профессора Льва Генриховича Шнирельмана, последовавшей в Москве 24 сентября 1938 года.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

Л. Г. ШНИРЕЛЬМАН

О ФУНКЦИЯХ В НОРМИРОВАННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИ ЗАМКНУТЫХ ТЕЛАХ

В работе показывается, что в алгебраически замкнутых нормированных телах существует аналог интегралу Коши, позволяющий рассмотреть разложение целых функций в этих телах на линейные множители.

Пусть тело T удовлетворяет следующим условиям:

1) T нормировано, т. е. всякому элементу a из T отвечает положительное вещественное число $|a|$ (норма a), обладающее свойствами

$$|ab| = |a||b|,$$
$$|a+b| \leqslant \max(|a|, |b|);$$

2) T алгебраически замкнуто;

3) если образовать из T метрическое пространство, приняв за расстояние между a и b норму разности $|a-b|$, то полученное пространство будет полным.

Будем называть целыми элементами T те из элементов T, нормы которых не превосходят единицы.

Рассмотрим степенной ряд

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{1}$$

где a_i и x суть элементы T.

Необходимым и достаточным условием сходимости такого ряда служит, конечно, стремление к нулю его общего члена. Если этот ряд сходится при $x = x_0$, то он сходится и при всех x, нормы которых не превосходят $|x_0|$.

Если ряд (1) сходится при всех x из T, то будем говорить, что этот ряд представляет целую функцию от x в теле T.

Очевидно, что из сходимости ряда (1) при $|x| \leqslant \rho$ следует

$$\lim |a_n| \rho^n = 0. \tag{2}$$

Если (1) представляет целую функцию, то (2) выполняется при любом ρ.

Дискретный контур. Рассмотрим последовательность многочленов $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_n(x)$, ... возрастающих степеней.

Пусть $g_i(x)$ не имеет кратных корней и его разложение по убывающим степеням x имеет вид

$$g_i(x) = x^{n_i} + c_{i1} x^{n_{i_1}} + \ldots + c_{i\mu} x^{n_{i_\mu}} + c_{i,\,\mu+1},$$

где c_{ij} — целые числа из T, свободный член $c_{i,\,\mu+1}$ равен по норме 1.

Предположим, что n_{i_μ} и разность $n_i - n_{i_1}$ безгранично растут с i и $|n_i e| = 1$ (e—единица тела).

В дальнейшем, для краткости, вместо $n_i e$, где n_i — натуральное число, e — единица тела, будем писать n_i. Примером такой последовательности многочленов может служить последовательность $g_i(x) = x^{n_i} - 1$, где n_i подобраны так, что $|n_i| = 1$.

Назовем последовательность многочленов $g_i(x)$ указанного вида контурной последовательностью.

В виду алгебраической замкнутости T можем образовать последовательность совокупностей корней $g_i(x)$, которые обозначим через

$$\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in_i}.$$

С помощью этих корней построим новую последовательность совокупностей чисел

$$\alpha + r\alpha_{i1}, \quad \alpha + r\alpha_{i2}, \ldots, \alpha + r\alpha_{in_i}, \tag{3}$$

где α и r — постоянные элементы T.

Последовательность вида (3) назовем дискретным контуром с центром в α радиуса $\rho = |r|$, определенным контурной последовательностью $g_i(x)$. Обозначать последовательность (3) будем коротко $\alpha + rg$.

Интеграл функции по дискретному контуру. Пусть функция $f(x)$ определена для всех элементов T, принадлежащих дискретному контуру $\alpha + rg$.

Если существует предел выражения

$$\frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} f(\alpha + r\alpha_{ik})$$

при $i \to \infty$, то назовем этот предел интегралом $f(x)$ по дискретному контуру $\alpha + rg$ и обозначим его через

$$\int_{\alpha+rg}^{x} f(x).$$

В тех случаях, когда этот предел зависит не от контурной последовательности $g_i(x)$, а только от r и α, будем писать короче:

$$\int_{\alpha,\, r}^{x} f(x).$$

Легко видеть, что

$$\int\limits_{\alpha, r}^{x} P(x) = P(\alpha), \tag{4}$$

где $P(x)$ — любой полином.

В самом деле, $\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} P(\alpha + r\alpha_{ik}) = P(\alpha)$, если только $n_i - n_{i_1}$ больше степени $P(x)$, в виду условий, наложенных на g_i. Из тождества

$$\frac{1}{n_i}\frac{g_i'\left(\frac{x}{r}\right)}{g_i\left(\frac{x}{r}\right)} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{1}{\frac{x}{r} - \alpha_{ij}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{x}{r}\right)} \frac{\left(\frac{x}{r}\right)^{n_i} + \frac{n_{i_1}}{n_i} c_{i1}\left(\frac{x}{r}\right)^{n_{i_1}} + \ldots + \frac{n_{i_\mu}}{n_i} c_{i\mu}\left(\frac{x}{r}\right)^{n_{i_\mu}}}{\left(\frac{x}{r}\right)^{n_i} + c_{i1}\left(\frac{x}{r}\right)^{n_{i_1}} + \ldots + c_{i,\mu+1}}$$

следует

$$\int\limits_{0, r}^{z} \frac{z}{z-x} = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| < \rho, \\ 0 & \text{»} \ |x| > \rho. \end{cases} \tag{5}$$

Пусть $f(x)$ задана рядом (1), сходящимся при $|x| < R$. Из (4) и (5) следует, что при $\rho < R$ и $|\alpha| < \rho$

$$\int\limits_{\alpha, r}^{z} f(z) = f(\alpha), \qquad \int\limits_{\alpha, r}^{z} f(z)(z-\alpha) = 0 \tag{6}$$

и

$$\int\limits_{0, r}^{z} \frac{f(z)\,z}{z-x} = \begin{cases} f(x) & \text{при } |x-\alpha| < \rho, \\ 0 & \text{»} \ |x-\alpha| > \rho. \end{cases} \tag{7}$$

Формулы для производных (определяющихся как обычно) имеют тоже обычный вид:

$$f^{(n)}(x) = n! \int\limits_{0, r}^{z} \frac{f(z)\,z}{(z-x)^{n+1}}.$$

Если $f(x)$ представляется с помощью (7) и не превосходит на контуре α, r по норме числа M, то при всех $|z| < \rho$

$$|f(z)| < M, \quad |f^{(n)}(z)| < \frac{M}{\rho^n}.$$

Отсюда следует: функция вида (7) разлагается в степенной ряд по степеням $(x-\alpha)$, сходящийся при $|x-\alpha| < \rho$.

По аналогии с теоремой Лиувилля получаем:

Следствие 1. Целая функция, ограниченная во всем алгебраическом теле, есть константа.

Замечание. Аналог теореме Лиувилля не имеет места в телах с конечным числом классов остатков по простым идеалам, например в Hensel'евском p-адическом теле, как это явствует из примеров.

Имеет место также

Следствие 2. Если $P(z)$ и $Q(z)$ многочлены от z, причем $Q(z)$ не имеет корней, равных по норме ρ, то $\int\limits_{0,\,r}^{z} \frac{P(z)\,z}{Q(z)}$ есть сумма вычетов дроби $\frac{P(z)}{Q(z)}$ по всем полюсам внутри $|z| < \rho$.

***

ЛЕММА 1. *Пусть $f(x)$ задана рядом (1), сходящимся при $|x| < R$ и $\rho < R$. Существует такое вещественное число α, сколь угодно близкое ρ, что при $|x| = \alpha$, $|f(x)| = \tau(\alpha)$, где $\tau(\alpha)$ зависит только от α (т. е. $\tau(\alpha)$ зависит только от нормы x).*

В самом деле, напишем ряд членов

$$a_0, \quad a_1\alpha, \ \ldots, \ a_n\alpha^n, \ \ldots$$

В виду того что $|a_n\alpha^n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, среди членов этой последовательности имеется один или несколько наибольших по норме.

Если такой член один, то обозначим через τ его норму. Если же наибольших членов несколько, то выберем среди них член с наименьшей степенью α. Пусть это будет $a_i\alpha^i$. Выберем $\beta < \alpha$ и столь близким к α, чтобы в ряду

$$a_0, \quad a_1\beta, \ \ldots, \ a_i\beta^i, \ \ldots, \ a_n\beta^n, \ \ldots$$

был один наибольший, именно $a_i\beta^i$. Норму этого члена обозначим в этом случае тоже через τ. Очевидно, что при $|x| = \alpha$ в первом случае и $|x| = \beta$ во втором случае $|f(x)| = \tau$.

Если имеем два числа μ_1 и μ_2 ($\mu_1 \leqslant \mu_2$), для которых в каждом из рядов $a_i\mu_1^i$ и $a_i\mu_2^i$ имеется по одному наибольшему по норме члену, то максимальный по норме член среди $a_i\mu_1^i$ не превосходит максимального члена среди $a_i\mu_2^i$. Поэтому $|f(x_1)| \leqslant |f(x_2)|$, если $|x_1| = \mu_1$, а $|x_2| = \mu_2$.

ЛЕММА 2. *Число корней $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, не превосходящих по норме заданной величины $\rho < R$, остается постоянным, начиная с $n > N(\rho)$.*

Выберем α ($\rho \leqslant \alpha < R$), обладающее свойством, указанным в лемме 1. При $n > N(\alpha)$ и при $|x| = \alpha$

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| < \varepsilon^n \quad (\varepsilon \text{ — фиксированное число, меньшее } 1),$$

$$|P_{n+1}(x)| = |P_n(x)| = \tau(\alpha) \quad (\tau \text{ не зависит от } n),$$

$$|P'_{n+1}(x)| = |P'_n(x)| \leqslant \frac{\tau(\alpha)}{\alpha}.$$

Полагая

$$P_{n+1}(x) - P_n(x) = \delta(x), \quad P'_{n+1}(x) - P'_n(x) = \delta'(x),$$

имеем

$$\left|\frac{P'_{n+1}(x)}{P_{n+1}(x)} - \frac{P'_n(x)}{P_n(x)}\right| = \left|\frac{P_n(x)\,\delta'(x) - P'_n(x)\,\delta(x)}{P_n(x)\,P_{n+1}(x)}\right| < \frac{\tau(\alpha)\,\varepsilon^n}{\alpha\tau^2(\alpha)} = \frac{\varepsilon^n}{\alpha\tau(\alpha)}.$$

Отсюда, если $|g|=\alpha$,

$$\left|\int\limits_{0,\,g}^{x}\left(\frac{P'_{n+1}(x)}{P_{n+1}(x)}-\frac{P'_n(x)}{P_n(x)}\right)x\right|<\frac{\varepsilon^n}{\alpha\,\tau(\alpha)}\,.$$

Но этот интеграл представляет разность числа корней, меньших α, $P_{n+1}(x)$ и $P_n(x)$. Эта разность есть число не большее, чем $n+1$. Если бы она не обратилась в нуль, начиная с некоторого $n\geqslant N$, то ее норма была бы не меньше, чем $|p|^{\log_p(n+1)}$, где p — некоторое простое число. Обе оценки для разности чисел корней $P_{n+1}(x)$ и $P_n(x)$ друг другу противоречат при достаточно большом n.

Выберем последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, стремящуюся к ρ, где α_i все обладают свойством, указанным в лемме 1. Обозначим через M_i число корней P_{N_i}, не превосходящих α_i и соответствующих столь большому N_i, что это число остается без изменения для всех $n\geqslant N_i$. Числа M_i образуют, очевидно, невозрастающую с увеличением i последовательность. Значит, так как все $M_i\geqslant 0$, они, начиная с достаточно большого номера $i\geqslant i_0$, равны между собой. В виду равномерности относительно i оценки для номера N_i видим, что при $N>N_i$ все P_n не имеют корней, заключенных по норме между α_i и α. Начиная с этого N, все $P_n\,(n\geqslant N)$ имеют одинаковое число корней, не превосходящих ρ.

ЛЕММА 3. *Обозначим через $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ многочлены степени n с целыми коэффициентами, связанные соотношением*

$$f(x)=g(x)-h(x).$$

Пусть $g(x)$ имеет m корней $\alpha+\alpha_1, \ldots, \alpha+\alpha_m$, где α и α_i числа из T, и $|\alpha_i|<|r|$. Обозначим через β число, заключенное по норме между наибольшими из α_i и r. Если для любого x вида $\alpha+z$, где $|z|=|\beta|$, выполняется неравенство

$$|h(x)|+|h'(x)|<\frac{|p|^{\lg_p n}\,|g^2(x)|}{(|g|+|g'|)}\,,$$

то $f(x)$ имеет m корней вида $\alpha+\theta$, где $|\theta|<|\beta|$.

Имеем:

$$\int\limits_{\alpha,\,\beta}^{x}\frac{g'(x)}{g(x)}(x-\alpha)=m,$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{g'-h'}{g-h}\,,\quad \frac{f'}{f}-\frac{g'}{g}=\frac{hg'-h'g}{g(g-h)}\,.$$

В виду $|h|<|g|$, на контуре α, β

$$|g-h|=|g|,\quad |hg'-h'g|<(|h|+|h'|)(|g|+|g'|),$$

имеем всюду на контуре α, β:

$$\left|\frac{f'}{f}-\frac{g'}{g}\right|<\frac{(|h|+|h'|)(|g|+|g'|)}{|g|^2}<|p|^{\lg_p n}$$

Значит,

$$\left|\int\limits_{\alpha,\beta}^{x} \frac{f'(x)}{f(x)}(x-\alpha) - \int\limits_{\alpha,\beta}^{x} \frac{g'(x)}{g(x)}(x-\alpha)\right| < |p|^{\lg_p n}.$$

Но разность рассматриваемых интегралов есть целое число между 0 и n. Его норма, если это число не нуль, не может быть меньше, чем $|p|^{\lg_p n}$. Поэтому рассматриваемая разность равна нулю и $g(x)$ имеет столько же корней, отличающихся от α по норме не более чем на β, сколько $f(x)$, т. е. m.

ЛЕММА 4. *Если* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$ (a_i *целые числа из* T) *есть целая функция,* $f_n(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$, η *вещественное число между* 0 *и* 1, k *любое целое* > 0, α *корень* $f_n(x)$, *не превосходящий фиксированного* ρ *и* $|\alpha| > \eta$, *то можно выбрать такое* $N(\eta)$, *что для* $n \geqslant N(\eta)$ *существует корень* $f_{n+k}(x)$, *отличающийся от* α *по норме не более, чем на* η.

Можно, не ограничивая общности, положить $a_0 = 1$, в виду подстановки $x = a_0 z$.

Пусть $f_n(x)$ имеет корень α. Положим $x = \alpha + y$, где $|y| = \eta_n'$.

Выберем $\eta_n' < \eta$ так, чтобы не существовало корня $f_n(x)$ и $f_n'(x)$ вида $\alpha + y$.

Тогда имеем:

$$f_n(x) = a_n(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n),$$

причем $a_n \alpha_1 \ldots \alpha_n = (-1)^n$.

Отсюда

$$|f_n(x)| = |\alpha|^{\mu}\, \eta_n'^{\varkappa} \theta_1 \ldots \theta_\lambda |\alpha_{\mu+\varkappa+\lambda+1}| \ldots |\alpha_n|\,|a_n|,$$

где α_i расположены в порядке возрастания; μ — число α_i меньших α по норме; $\varkappa$ — число α_i равных α по норме, причем $|\alpha_i - \alpha| < \eta_n'$; $\theta_1, \ldots, \theta_\lambda$ нормы $|\alpha_i - \alpha|$, которые меньше $|\alpha|$ и больше η_n'; $\alpha_{\mu+\varkappa+\lambda+1}, \ldots, \alpha_n$ те из α_i, которые больше α по норме.

$$|f_n(x)| > \frac{|\alpha|^{\mu}\, \eta_n'^{\varkappa+\lambda} |\alpha_{\mu+\varkappa+\lambda+1}| \ldots |\alpha_n|}{|\alpha_1| \ldots |\alpha_n|} = \frac{|\alpha|^{\mu}\, \eta_n'^{\varkappa+\lambda}}{|\alpha_1| \ldots |\alpha_{\mu+\varkappa+\lambda}|} >$$

$$> \frac{|\alpha|^{\mu}\, \eta_n'^{\varkappa+\lambda}}{|\alpha|^{\mu+\varkappa+\lambda}} = \left|\frac{\eta_n'}{\alpha}\right|^{\varkappa+\lambda}.$$

Имеем

$$|f_n(x)| \leqslant \max(1, |\alpha|^n), \quad |f_n'(x)| \leqslant \max(1, |\alpha|^n).$$

Поэтому

$$\frac{|p|^{\lg_p n}\, |f_n^2(x)|}{(|f_n(x)| + |f_n'(x)|)} > \frac{|p|^{\lg_p n}}{2\max(1, |\alpha|^n)} \left|\frac{\eta_n'}{\alpha}\right|^{2(\varkappa+\lambda)}.$$

В виду того что $f(x)$ целая функция, число корней $f_n(x)$, не превосходящих ρ, остается постоянным, равным какому-нибудь m, начиная с $n \geqslant N(\rho)$. Значит $\varkappa + \lambda \leqslant m$. С другой стороны, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)|$ при $n \geqslant N(\varepsilon)$ и при $|x| = |\alpha|$ должно быть меньше ε^n, каково бы ни было

$\varepsilon > 0$. При достаточно большом n и при $\varepsilon < \frac{1}{\rho}$ будет выполняться неравенство

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| + |f'_{n+1}(x) - f'_n(x)| < \frac{|p|^{\lg_p n} |f_n^2(x)|}{(|f_n(x)| + |f'_n(x)|)},$$

справедливое для любого x вида $\alpha + y$, где $|y| = \eta'_n$.

Отсюда, на основании леммы 3 заключаем о существовании у $f_{n+1}(x)$ корня, отличающегося от α по норме не более, чем на η'_n, следовательно, менее, чем на η.

Переходя от $f_{n+1}(x)$ к $f_{n+2}(x)$ и т. д., заключаем, что у $f_{n+k}(x)$ при любом $k > 0$ существует корень, отличающийся от α менее, чем на η.

ТЕОРЕМА. *Всякая целая функция* $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$, *не сводящаяся к полиному, имеет бесконечное множество корней* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, *стремящихся по норме к бесконечности, и разлагается в сходящееся бесконечное произведение*

$$f(x) = a_0 \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) \ldots$$

Пусть a_t — первый из коэффициентов после a_0, не обращающийся в нуль.

Обозначим через $\alpha_{n1}, \ldots, \alpha_{nn}$ корни $f_n(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$. Из тождества $\sum \frac{1}{\alpha_{ni_1} \ldots \alpha_{ni_t}} = -\frac{a_t}{a_0}$ заключаем, что

$$\max \frac{1}{|\alpha_{ni}|} \geqslant \sqrt[t]{\left|\frac{a_t}{a_0}\right|},$$

следовательно,

$$\min |\alpha_{ni}| \leqslant \sqrt[t]{\left|\frac{a_0}{a_t}\right|}.$$

Положим $\rho = \sqrt[t]{\left|\frac{a_0}{a_t}\right|}$. Выберем последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю, $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \ldots$ Существует (на основании леммы 4) такое целое положительное $N(\eta)$, что при $n \geqslant N(\eta)$ существует корень β_n ($|\beta_n| \leqslant \rho$) полинома $f_n(x)$ и корень β_{n+n_1} полинома $f_{n+n_1}(x)$, отличающийся от β_n не более, чем на η_1. Можно выбрать далее корень $f_{n+n_1+n_2}(x)$, отличающийся по норме от β_{n+n_1} не более, чем на η_2, и т. д.

Получается последовательность чисел из тела T $\beta_n, \beta_{n+n_1}, \ldots, \beta_{n+n_1+\ldots+n_i}$, очевидно, сходящаяся к какому-то числу α из T.

Имеем

$$f(\alpha) = \lim f(\beta_{n+n_1+\ldots+n_k}) =$$
$$= \lim [f(\beta_{n+\ldots+n_k}) - f_{n+\ldots+n_k}(\beta_{n_1+\ldots+n_k})] = 0.$$

Таким образом, α есть корень $f(x)$. Норма α не превосходит ρ.

В виду того что

$$\frac{f(x)}{x-\alpha} = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2}(x-\alpha) + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \ldots$$

есть целая функция, можем найти второй корень $f(x)$ и т. д. В виду того что у $f(x)$ может быть лишь конечное число корней, не превосходящих по норме ρ, видно, что корни $f(x)$ образуют последовательность α_i, стремящуюся с возрастанием i по норме к бесконечности.

Образуем сходящееся при любом x произведение

$$\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha_i}\right)\ldots$$

Это произведение представляет целую функцию $g(x)$ от x. Покажем, что $\frac{f(x)}{g(x)}$ есть целая функция.

В самом деле, пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ будут все α, не превосходящие по норме какого-нибудь числа ρ. Тогда

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha_k}\right)}\,\frac{1}{\prod\limits_{i=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{\alpha_i}\right)},$$

$\frac{f(x)}{\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha_k}\right)}$ есть целая функция, $\frac{1}{\prod\limits_{i=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{x}{\alpha_i}\right)}$, очевидно, разлагается в ряд по степеням x, сходящийся при $|x|<\rho$. Поэтому $\frac{f(x)}{g(x)}$ разлагается в ряд по степеням x, сходящийся при $|x|<\rho$.

В виду произвольности ρ, $\frac{f(x)}{g(x)}$ есть целая функция. Но $\frac{f(x)}{g(x)}$ не имеет нулей. Согласно доказанному $\frac{f(x)}{g(x)}$ есть постоянная. Она, очевидно, равна a_0.

Поэтому

$$f(x)=a_0\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\ldots$$

Следствие. Пусть целая функция $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$ имеет коэффициенты a_i, принадлежащие компактному подкольцу K тела T. В таком случае $f(x)$ разлагается в сходящееся произведение многочленов с коэффициентами из K.

Рассмотрим $f_n(x)=a_0+\ldots+a_nx^n$. Эти многочлены, начиная с $n>N(\rho)$, имеют одно и то же число корней $A(\rho)$, по норме не превосходящих ρ.

Многочлен $f_n(x)$ может быть разложен на неприводимые в кольце K множители.

Согласно определению нормы корней неприводимых уравнений, все корни неприводимого уравнения имеют одну и ту же норму. Поэтому $f_n(x)$ разлагается на неприводимые множители; степень одного из них для каждого $n>N(\rho)$ не превосходит $A(\rho)$. Заставляя n стремиться к бесконечности и пользуясь компактностью K и ограниченностью степени этого множителя, можем перейти к пределу при $n\to\infty$ и получить делитель $f(x)$ степени не выше $A(\rho)$ с коэффициентами из K.

Пример. Рассмотрим целую функцию

$$f(x)=1+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots,$$

где a_i — целые числа из T, причем

$$1>|a_1|>\left|\frac{a_2}{a_1}\right|>\ldots$$

Нетрудно доказать способом последовательных приближений, что корни этой функции все простые и их нормы, расположенные в порядке возрастания, равны

$$\frac{1}{|a_1|},\quad \frac{|a_1|}{|a_2|},\ \ldots,\ \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},\ldots$$

Замечание. Обозначим через $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ целые функции с целыми коэффициентами, связанные соотношением

$$f(x)=g(x)-h(x).$$

Пусть α корень $g(x)$ кратности ρ. Положим

$$g(x)=(x-\alpha)^\rho g_1(x),\quad |g_1(\alpha)|=\mu,\quad |h(\alpha)|=\mu_1,\quad |\alpha|=\tau\leqslant 1,$$

$\mu_2=\min(\mu,\tau)$; $\nu=1$, если $|\rho|=1$; $\nu=|\rho|\cdot|p|^{\frac{1}{p-1}}$, если $|\rho|<1$ и $|p|<1$. Допустим, что $\mu_1<\mu\mu_2^\rho\nu^\rho$. В таком случае существует ρ корней $\alpha_1,\ldots,\alpha_\rho$ функции $f(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$|\alpha_i-\alpha|<\alpha,\qquad i=1,\ldots,\rho,$$

причем все α_i выражаются через корень α, $\sqrt[\rho]{\frac{h(\alpha)}{g_1(\alpha)}}$, и корни степени ρ из единицы с помощью рациональных операций и перехода к пределу.

Для доказательства будем искать корни $f(x)$, близкие к α, способом последовательных приближений, предполагая, что μ_1 совпадает с нормой максимальных членов в разложении $h(x)$.

Уравнение $f(x)=0$ можно писать в форме

$$g(x)-h(x)=(x-\alpha)^\rho g_1(x)-h(x)=0,$$

и далее

$$(x-\alpha)^\rho=\frac{h(x)}{g_1(x)},\quad \text{т. е. } x=\alpha+\varepsilon_i\sqrt[\rho]{\frac{h(x)}{g_1(x)}},\tag{8}$$

где ε_i — корни из единицы степени ρ.

В качестве исходного значения β_{01} примем α. Подставляя это значение в правую часть, получим

$$\beta_{1i}=\alpha+\varepsilon_i\sqrt[\rho]{\frac{h(\alpha)}{g_1(\alpha)}}.$$

Имеем

$$\left|\varepsilon_i\sqrt[\rho]{\frac{h(\alpha)}{g_1(\alpha)}}\right|=\sqrt[\rho]{\frac{\mu_1}{\mu}}.$$

Полагая $\delta_{1i}=\beta_{1i}-\beta_{0i}$, имеем

$$|\delta_{1i}|=\sqrt[\rho]{\frac{\mu_1}{\mu}}.$$

Подставляя в уравнение (8) значения β_{1i}, получим

$$\beta_{2i} = \alpha + \varepsilon_i \sqrt[\rho]{\frac{h(\beta_{1i})}{g_1(\beta_{1i})}}.$$

Имеем

$$g_1(\beta_{1i}) = g_1(\alpha) + g_1'(\alpha)\,\delta_{1i} + \frac{g_1''(\alpha)}{2}\,\delta_{1i}^2 + \ldots$$

Из условия $\mu_1 < \mu^{\rho+1}$ следует, что все члены, следующие за первым, по норме меньше первого и поэтому

$$|g_1(\beta_{1i})| = |g_1(\alpha)| = \mu.$$

Точно так же

$$|h(\beta_{1i})| = |h(\alpha)| = \mu_1.$$

Далее

$$\frac{h(\beta_{1i})}{g_1(\beta_{1i})} = \frac{h(\alpha)}{g_1(\alpha)}(1+\theta),$$

где

$$1+\theta = \frac{1 + \frac{h'(\alpha)}{h(\alpha)}\,\delta_{1i} + \frac{h''(\alpha)}{h(\alpha)}\,\delta_{1i}^2 + \ldots}{1 + \frac{g_1'(\alpha)}{g_1(\alpha)}\,\delta_{1i} + \frac{g_1''(\alpha)}{g_1(\alpha)}\,\delta_{1i}^2 + \ldots},$$

$$|\theta| \leqslant \max\left(\frac{\sqrt[\rho]{\frac{\mu_1}{\mu}}}{\tau}, \frac{\sqrt[\rho]{\frac{\mu_1}{\mu}}}{\mu}\right) = \frac{\sqrt[\rho]{\frac{\mu_1}{\mu}}}{\mu_2}.$$

Из неравенства $\dfrac{\sqrt[\rho]{\frac{\mu_1}{\mu}}}{\nu\mu_2} < \eta < 1$ следует $\sqrt[\rho]{1+\theta} = 1+\sigma$, где $|\sigma| < \eta$.

Отсюда для $\delta_{2i} = \beta_{2i} - \beta_{1i}$ получаем

$$|\delta_{2i}| = |\beta_{2i} - \beta_{1i}| \leqslant |\beta_{1i} - \beta_{0i}|\,\eta = |\delta_{1i}|\,\eta.$$

Относительно β_{2i} можно повторить аналогичное рассуждение:

$$g_1(\beta_{2i}) = g_1(\beta_{1i}) + g_1'(\beta_{1i})\,\delta_{2i} + \ldots,$$
$$h(\beta_{2i}) = h(\beta_{1i}) + h'(\beta_{1i})\,\delta_{2i} + \ldots$$

В виду $|\delta_{2i}| < |\delta_{1i}| = \sqrt[\rho]{\frac{\mu_1}{\mu}}$ заключаем попрежнему, что

$$\frac{h(\beta_{2i})}{g_1(\beta_{2i})} = \frac{h(\beta_{1i})}{g_1(\beta_{1i})}(1+\theta_1),$$

где $|\theta_1| \leqslant \dfrac{\sqrt[\rho]{\frac{\mu_1}{\mu}}}{\mu_2}$ и следовательно

$$\sqrt[\rho]{1+\theta_1} = 1+\sigma_1, \qquad |\sigma_1| < \eta.$$

Полагая

$$\beta_{3i} = \alpha + \varepsilon_i \sqrt[\rho]{\frac{h(\beta_{2i})}{g_1(\beta_{2i})}}, \quad \delta_{3i} = \beta_{3i} - \beta_{2i},$$

получим

$$|\delta_{3i}| < |\delta_{2i}|\,\eta.$$

Продолжая процесс нахождения последовательных приближений, убеждаемся, что

$$|\delta_{n+1,\, i}| < |\delta_{ni}|\,\eta,$$

т. е. процесс сходится и в пределе получаются ρ чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_\rho$.

В виду

$$|\alpha| = |\beta_{0i}| = |\beta_{1i}| = \dots = |\beta_{ki}| = \dots,$$

видим, что

$$|\alpha_1| = |\alpha_2| = \dots = |\alpha_\rho| = |\alpha|.$$

Точнее, из

$$|\alpha| > |\beta_{1i} - \alpha| > |\beta_{2i} - \alpha| > \dots$$

следует

$$|\alpha_i - \alpha| < \alpha, \qquad i = 1, \dots, \rho.$$

При выполнении процесса последовательных приближений все извлечения корней степени ρ сводятся к одному извлечению $\sqrt[\rho]{\frac{h(\alpha)}{g_1(\alpha)}}$, ибо все последующие корни выражаются рационально через этот первый. Таким образом корни $\alpha_1, \dots, \alpha_\rho$ функции $f(x)$ выражаются с помощью рациональных операций и перехода к пределу через корень функции $g(x)$, $\sqrt[\rho]{\frac{h(\alpha)}{g_1(\alpha)}}$, и корни степени ρ из единицы.

Следствие. Корни всех алгебраических уравнений данной степени n, коэффициенты которых принадлежат компактному подмножеству в теле T, выражаются, с помощью рациональных операций одного извлечения корня не выше n-ой степени и перехода к пределу, через корни конечного числа этих уравнений.

В самом деле, указанная совокупность уравнений компактна. Для каждого уравнения P, как вытекает из леммы 3, можно выбрать столь узкую «окрестность» в пространстве уравнений, что корни всех этих уравнений выразятся, с помощью рациональных операций перехода к пределу и извлечения корней не выше n-ой степени, через корни «центрального» многочлена P. На основании теоремы Heine-Borel'я конечное число этих окрестностей покроет все пространство уравнений. Все корни рассматриваемых уравнений выражаются, с помощью рациональных операций перехода к пределу и одного извлечения корня степени не большей, чем n, через корни конечного числа «центральных» многочленов.

Очевидно, что совокупность всех корней всех уравнений P компактна, если только старшие коэффициенты P не меньше по норме фиксированного числа, большего нуля.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
1. VII. 1938.

L. SCHNIRELMANN. SUR LES FONCTIONS DANS LES CORPS NORMÉS ET ALGÉBRIQUEMENT FERMÉS

RÉSUMÉ

Soit T un corps vérifiant les conditions suivantes:

1) à tout élément a de T correspond un nombre réel $|a|$, la norme de a; on a

$$|ab| = |a| \cdot |b|; \quad |a+b| \leq |a| + |b|;$$

2) le corps T est un espace métrique complet avec la distance $|a-b|$

3) T est algébriquement fermé.

On montre que dans les corps de cette espèce il existe une expression analogue à l'intégrale de Cauchy. Elle permet de démontrer qu'une fonction entière (les a_i étant des élements de T)

$$f(x) = x_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

a toujours une infinité de racines α_i dans le corps T dont les normes $|\alpha_i|$ croissent infiniment, et qu'on a d'ailleurs la décomposition suivante en facteurs linéaires ($a_0 \neq 0$):

$$f(x) = a_0 \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right) \ldots$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

С. Н. БЕРНШТЕЙН

О БАЗЕ СИСТЕМЫ ЧЕБЫШЕВА

В статье дается общий метод построения базы произвольно заданной системы функций Чебышева.

Пусть $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)$ будет какая-нибудь система T Чебышева на отрезке $(a < b)$. Мы называем базой * этой системы такую систему полиномов

$$\psi_i(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{ik} f_k(x) \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{1}$$

которая удовлетворяет условиям, что

$$\lim_{x=a} \frac{\psi_{i+1}(x)}{\psi_i(x)} = 0, \quad \lim_{x=b} \frac{\psi_i(x)}{\psi_{i+1}(x)} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2}$$

Из (2) вытекает, что функции $\psi_i(x)$ линейно независимы и, следовательно, образуют также систему T Чебышева (эквивалентную данной). Условимся называть систему функций $\psi_i(x)$ нормированной, если абсолютный максимум $\psi_i(x)$ на (a, b) равен единице.

Нетрудно видеть, что система T функций $f_i(x)$ не может иметь более одной нормированной базы на отрезке (a, b), так как полиномы этой системы, которые всегда можно представить в виде

$$P_i(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{ik} \psi_k(x) \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

только тогда могут удовлетворять условиям (2), когда

$$c_{ik} = 0 \quad (i \gtrless k).$$

В указанном месте мною было замечено, что в случае существования производных первых n порядков у данных функций $f_i(x)$ функции $\psi_i(x)$ определяются (с точностью до постоянного множителя) условиями, что

$$\psi_i^{(\lambda)}(a) = \psi_i^{(\mu)}(b) = 0 \quad (0 \leqslant \lambda < i;\ 0 \leqslant \mu < n - i). \tag{3}$$

---

* Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, ч. I, ОНТИ 1937.

Здесь я хочу доказать существование базы у всякой системы T и дать прием для ее построения в общем случае. Для этого поступаем следующим образом.

Строим сначала некоторую систему полиномов по условию, чтобы

$$\lim \frac{\varphi_{i+1}(x)}{\varphi_i(x)} = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \tag{4}$$

Для этого, допуская (без ущерба для общности), что $f_0(a) > 0$, полагаем $\varphi_{00}(x) = f_0(x)$ и рассматриваем все полиномы вида

$$\varphi_{i1}(x) = f_i(x) + b_i f_0(x) \quad (i > 0),$$

где постоянные b_i определяются требованием, чтобы

$$f_i(a) + b_i f_0(a) = 0 \quad (i = 1, \dots, n). \tag{5}$$

Среди значков i будет по крайней мере один i_0 такой (для упрощения письма можем считать функции $f_i(x)$ расположенными в таком порядке, что $i_0 = 1$), что

$$\lim_{\substack{x=a \\ i}} \left| \frac{f_i(x) + b_i f_0(x)}{f_1(x) + b_1 f_0(x)} \right| < \infty. \tag{6}$$

Тогда система функций $\varphi_{00}(x)$, $\varphi_{11}(x)$, $\varphi_{21}(x), \dots, \varphi_{n1}(x)$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi_{i1}(x)}{\varphi_{00}(x)} = 0; \tag{7}$$

кроме того, вследствие (6) можем определить постоянные c_i по условию, что

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi_{i1}(x) + c_i \varphi_{11}(x)}{\varphi_{11}(x)} = 0 \quad (i = 2, \dots, n). \tag{8}$$

При этом, располагая функции $\varphi_{i1}(x)$ в соответствующем порядке и обозначая $\varphi_{i2}(x) = \varphi_{i1}(x) + c_i \varphi_{11}(x)$, будем, кроме того, иметь

$$\lim_{x=a} \left| \frac{\varphi_{i2}(x)}{\varphi_{22}(x)} \right| < \infty \quad (i \geqslant 2). \tag{9}$$

Следовательно, $\varphi_{00}(x)$, $\varphi_{11}(x)$, $\varphi_{22}(x)$, $\varphi_{32}(x), \dots, \varphi_{n2}(x)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi_{11}(x)}{\varphi_{00}(x)} = 0, \ \lim_{x=a} \frac{\varphi_{i2}(x)}{\varphi_{11}(x)} = 0 \quad (i \geqslant 2) \tag{10}$$

и, кроме того, благодаря (9) можно так выбрать постоянные d_i, что

$$\lim_{x=a} \frac{\varphi_{i2}(x) + d_i \varphi_{22}(x)}{\varphi_{22}(x)} = 0 \quad (i \geqslant 3).$$

Продолжая таким же образом, получим последовательные полиномы $\varphi_{00}(x)$, $\varphi_{11}(x)$, $\varphi_{22}(x), \dots, \varphi_{nn}(x)$, удовлетворяющие всем условиям (4).

Заметим, что последовательность полиномов $\varphi_i(x)$, удовлетворяющих условиям (4), обладает свойством, что $\varphi_k(x)$, $\varphi_{k+1}(x), \dots, \varphi_n(x)$ также представляет систему T (по-

знака $n-k$) при всяком $k \leqslant n$. В самом деле, если $a < x_0 < \ldots < x_n \leqslant b$, то определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) \ldots \varphi_0(x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x_0) \ldots \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \gtrless 0$$

сохраняет постоянный знак.

Положим (без ущерба для общности), что $\varphi_i(x) > 0$ при $x - a$ достаточно малом. Тогда знак Δ совпадает с знаком

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_1(x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x_1) \ldots \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

который поэтому также знака не меняет. Повторяя то же рассуждение, замечаем, что при всяком k

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} \varphi_k(x_k) \ldots \varphi_k(x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x_k) \ldots \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

сохраняет постоянный знак $\Delta_n = \varphi_n(x_n)$, т. е. положителен (в частности, $\varphi_n(x) > 0$ при $a < x \leqslant b$).

Следовательно, полином

$$P(x) = \sum_{i=k}^{n} a_i \varphi_i(x) \tag{11}$$

не может иметь более $n-k$ корней при $a < x \leqslant b$. Будем говорить, что $x = a$ является корнем кратности $k \leqslant n$ заданной системы T для полинома $P(x)$ вида (11). Очевидно, что кратность корня $x = a$ полинома $P(x)$ не зависит от выбора полиномов $\varphi_i(x)$ данной системы, удовлетворяющих условиям (4).

Аналогичным образом определим корень кратности k_1 (данной системы T) в точке $x = b$, имея в виду, что всякий полином $P(x)$ данной системы может быть также представлен при помощи некоторых полиномов $\theta_i(x)$, удовлетворяющих условиям $\lim\limits_{x=b} \frac{\theta_i(x)}{\theta_{i+1}(x)} = 0$, в форме

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n-k_1} b_i \theta_i(x),$$

причем $k_1 > 0$, если $P(b) = 0$.

Покажем, что

$$k+k_1 \leqslant n. \tag{13}$$

Это неравенство очевидно для $k_1=1$, так как тогда $k<n$ вследствие того, что если бы $k=n$, то $P(x)=a_n \varphi_n(x)$, но $\varphi_n(b)>0$. Вообще при увеличении k_1 максимальная кратность k корня a полинома $P(x)$ не может возрастать (так как число произвольных параметров убывает), необходимо лишь убедиться, что k при этом действительно убывает. Для этого заметим, что если бы мы имели также

$$P_1(x)=\sum_{i=0}^{n-k_1-1} b_i' \theta_i(x)=\sum_{i=k}^{n} a_i' \varphi_i(x),$$

где $a_k a_k' \gtrless 0$, то соответствующая линейная комбинация

$$\lambda P(x)+\mu P_1(x)=\sum_{i=k+1}^{n} a_i'' \varphi_i(x)=\sum_{i=0}^{n-k_1} b_i'' \theta_i(x)$$

имела бы в a корень кратности $k+1$, что противно допущению.

Но если мы для всякого k построим полиномы

$$\psi_k(x)=\sum_{i=k}^{n} A_{ik} \varphi_i(x)=\sum_{=0}^{k} C_{jk} \theta_j(x) \quad (k=0, 1, \ldots, n),$$

то $\psi_0(x), \psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)$ и будут служить базой для данной системы. Полагая

$$\theta_j(x)=\sum_{i=0}^{n} a_{ij} \varphi_i(x) \quad (j=0, 1, \ldots, n),$$

мы имеем при каждом данном k систему из k линейных однородных уравнений

$$\sum_{j=0}^{k} a_{ij} C_{jk}=0 \quad (i=0, 1, \ldots, k-1)$$

для определения C_{jk} $(j=0, 1, \ldots, k)$. После этого получим

$$A_{ik}=\sum_{j=0}^{k} a_{ij} C_{jk} \quad (i \geqslant k).$$

Кроме того, так как согласно сказанному выше, $C_{kk} \gtrsim 0$, следовательно, все главные миноры определителя

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & \dots & a_{n0} \\ a_{01} & a_{11} & \dots & \dots & a_{n1} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{0n} & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

должны быть отличны от нуля.

Замечу также, что условия (2), совместно с условиями, что $\psi_0(x), \dots, \psi_n(x)$ образуют систему T, влекут за собой, что любая часть их также представляет систему T, т. е. систему Декарта D* как справа, так и слева. Действительно, как было показано выше, все миноры определителя

$$\begin{vmatrix} \psi_0(x_0) & \psi_0(x_1) \dots \psi_0(x_n) \\ \psi_1(x_0) & \cdot \quad \dots \psi_1(x_n) \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \psi_n(x_0) & \cdot \quad \dots \psi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

составленные из элементов смежных строк, положительны, если $a < x_0 < \dots < x_n < b$. Но в цитированном месте доказано, что отсюда вытекает положительность всех миноров.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
20. X. 1938.

SERGE BERNSTEIN. DÉTERMINATION DE LA BASE D'UN SYSTEME DE TCHEBYCHEFF

RÉSUMÉ

Soit $f_0(x), \dots, f_n(x)$ un système T de fonctions de Tchebycheff sur le segment (a, b). On dit que le système de fonctions

$$\psi_i(x) = \sum_{k=0}^{n} A_{ik} f_k(x) \quad (i = 0, 1, \dots, n) \tag{1}$$

représente la base du système donné, si les polynômes $\psi_i(x)$ jouissent de la propriété que

$$\lim_{x=a} \frac{\psi_{i+1}(x)}{\psi_i(x)} = 0, \quad \lim_{x=b} \frac{\psi_i(x)}{\psi_{i+1}(x)} = 0. \tag{2}$$

On demontre que les fonctions $\psi_i(x)$ sont déterminées à un facteur constant près, et on donne un procédé général pour leur détermination effective, ce qui prouve leur existence sans aucune restriction sur la nature des fonctions $f_i(x)$ (sauf la continuité qui est impliquée dans la définition même des systèmes T).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

И. М. ВИНОГРАДОВ

ОЦЕНКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

В работе дается более простой вывод оценок тригонометрических сумм с подсчетом коэффициентов оценок.

В моей книге «Новый метод в аналитической теории чисел»* содержится систематическое изложение моего метода оценки тригонометрических сумм, а также некоторые приложения этого метода. В настоящей статье, уже не останавливаясь на приложениях, характер и разнообразие которых в достаточной мере были выяснены в указанной книге, я снова обращаюсь к центральному вопросу—оценке тригонометрических сумм. Здесь я даю более простой вывод оценок этих сумм, причем даю более точные формулировки теорем, подсчитывая не только порядок, но и численные коэффициенты оценок.

Как и в прежних работах, символом (z) обозначается расстояние вещественного числа z до ближайшего целого. Буквою θ всегда обозначается число, модуль которого не превосходит 1.

Леммы 1, 2, 3, 5 приведены без доказательств. В несколько иной форме эти леммы имеются в указанной моей книге.

ЛЕММА 1. *Пусть i целое > 1 и*

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & \ldots & x_i \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{i-1} & \ldots & x_i^{i-1} \end{vmatrix}; \quad \Delta_i^{(l)} = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{l-1} & \ldots & x_i^{l-1} \\ x_1^{l+1} & \ldots & x_i^{l+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{i-1} & \ldots & x_i^{i-1} \end{vmatrix}$$

Тогда имеем тождества $(\Delta_1 = 1)$

$$\begin{aligned} \Delta_i = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \ldots & (x_i - x_1) \\ (x_3 - x_2) \ldots & (x_i - x_2) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ & (x_i - x_{i-1}), \end{aligned} \qquad \Delta_i^{(l)} = D_{i-l-1}\,\Delta_{i-1},$$

где D_{i-l-1} есть сумма произведений чисел $x_1, \ldots, x_{i-1}$, взятых по $i-1-l$.

---

* Труды Математического института им. В. А. Стеклова, т. X, 1937.

ЛЕММА 2. *Пусть Q и P целые, $P > 0$, $U \geqslant 1$, α вещественное, γ вещественное, m целое $\geqslant 1$,*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \ q > 0,$$

$$\Omega = \sum_{y=Q+1}^{Q+P} \min\left(U, \frac{1}{2(\alpha m y + \gamma)}\right)$$

Тогда имеем

$$\Omega \leqslant \left(\frac{P}{q} + 1\right)(5mU + q \log q).$$

ЛЕММА 3. *Пусть Q и P целые, $P > 0$, $U > 0$, $1 \leqslant \beta < A - 1$, $\varphi(y)$ вещественная функция, удовлетворяющая условиям*

$$\frac{1}{A} \leqslant \varphi(Q+y+1) - \varphi(Q+y) \leqslant \frac{\beta}{A} \ (y = 1, \ldots, P-1).$$

Тогда

$$\sum_{y=Q+1}^{Q+P} \min\left(U, \frac{1}{2(\varphi(y))}\right) < \left(\frac{P\beta}{A-1-\beta} + 1\right)\left(2U + A \log A\right).$$

ЛЕММА 4. *Пусть n целое $\geqslant 2$,*

$$p > n^{n^2}, \ R > 1, \ H \geqslant 2, \ p = RH.$$

Пусть, далее, переменные $v_1, \ldots, v_n$ пробегают целые числа, лежащие в интервалах

$$X_1 \leqslant v_1 < Y_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$X_n \leqslant v_n < Y_n,$$

ограниченных условиями

$$Y_j - X_j \geqslant R \quad (j = 1, \ldots, n),$$
$$X_{j+1} - Y_j \geqslant R \quad (j = 1, \ldots, n-1),$$
$$-p \leqslant X_1, \ Y_n \leqslant p;$$

каждое из чисел $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ имеет одно из значений $1, -1$; наконец $C \geqslant 1$.

Тогда число E систем $(v_1, \ldots, v_n)$ с условием, что суммы

$$\varkappa_1 v_1 + \ldots + \varkappa_n v_n, \ldots, \varkappa_1 v_1^n + \ldots + \varkappa_n v_n^n \tag{1}$$

лежат в каких-либо заданных интервалах с длинами

$$C, Cp, \ldots, Cp^{n-1},$$

удовлетворяет неравенству

$$E < 5C^n H^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Доказательство. Пусть $1 < i < n$ и пусть $v_{i+1}, \ldots, v_n$ заданы, причем суммы (1) лежат в указанных в лемме интервалах. Тогда суммы

$$\varkappa_1 v_1 + \ldots + \varkappa_i v_i, \ldots, \varkappa_1 v_1^i + \ldots + \varkappa_i v_i^i,$$

очевидно, лежат в определенных интервалах с длинами

$$C, Cp, \ldots, Cp^{i-1}.$$

Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_i$; $\eta_1+\zeta_1, \ldots, \eta_i+\zeta_i$ две системы $v_1, \ldots, v_i$ с указанным свойством. Тогда имеем

$$x_1 \frac{(\eta_1+\zeta_1)-\eta_1}{1\cdot\zeta_1}\zeta_1 + \ldots + x_i \frac{(\eta_i+\zeta_i)-\eta_i}{1\cdot\zeta_i}\zeta_i = \frac{\theta_0 C}{1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_1 \frac{(\eta_1+\zeta_1)^i-\eta_1^i}{i\cdot\zeta_1}\zeta_1 + \ldots + x_i \frac{(\eta_i+\zeta_i)^i = \zeta_i^i}{i\cdot\zeta_i}\zeta_i = \frac{\theta_{i-1}C}{i}p^{i-1},$$

откуда, при выбранном определенным образом знаке, имеем

$$\Delta\zeta_i = \pm\Delta';\ \Delta = \begin{vmatrix} \frac{(\eta_1+\zeta_1)-\eta_1}{1\cdot\zeta_1} & \ldots & \frac{(\eta_i+\zeta_i)-\eta_i}{1\cdot\zeta_i} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{(\eta_1+\zeta_1)^i-\eta_1^i}{i\cdot\zeta_1} & \ldots & \frac{(\eta_i+\zeta_i)^i-\eta_i^i}{i\cdot\zeta_i} \end{vmatrix}$$

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{(\eta_1+\zeta_1)-\eta_1}{1\cdot\zeta_1} & \ldots & \frac{(\eta_{i-1}+\zeta_{i-1})-\eta_{i-1}}{1\cdot\zeta_{i-1}} & \frac{\theta_0 C}{1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{(\eta_1+\zeta_1)^i-\eta_1^i}{i\cdot\zeta_1} & \ldots & \frac{(h_{i-1}+\zeta_{i-1})^i-\eta_{i-1}^i}{i\cdot\zeta_{i-1}} & \frac{\theta_{i-1}'C}{i}p^{i-1} \end{vmatrix}$$

Отсюда, применяя формулу Лагранжа, без труда найдем

$$\Delta_i\,\zeta_i = \sum_{l=0}^{i-1} \varepsilon_l \frac{\theta_l C p^l}{l+1}\,\Delta_i^{(l)},$$

где Δ_i и $\Delta_i^{(l)}$ суть определители леммы 3, причем $x_1, \ldots, x_i$ удовлетворяют тем же неравенствам, что и $v_1, \ldots, v_i$. Каждое ε_i имеет одно из значений $1, -1$. Но, согласно лемме 1,

$$\Delta_i^{(l)} = D_{i-1-l}\Delta_{i-1} \leqslant \binom{i-1}{l} p^{i-1-l}\Delta_{i-1}.$$

Поэтому

$$|\,\zeta_i\,| \leqslant \sum_{l=0}^{i-1} \frac{\binom{i-1}{l} C p^{i-1}}{(l+1)\,(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})}$$

или, в виду справедливости при $i > j$ неравенства

$$x_i - x_j \geqslant [2(i-j)-1]R,$$

имеем

$$|\,\zeta_i\,| \leqslant \sum_{l=0}^{i-1} \frac{\binom{i-1}{l} C H^{i-1}}{(l+1)\,1\cdot 3\ldots(2i-3)} \leqslant$$

$$\leqslant C H^{i-1} \sum_{l=0}^{i-1} \frac{(i-1)!}{1\cdot 3\ldots(2i-3)\,(i-1-l)!\,(l+1)!} \leqslant L_i C H^{i-1},$$

где

$$L_2 = \frac{3}{2},\ L_3 = \frac{7}{9},\ L_4 = \ldots = L_n = \frac{1}{4}.$$

Это показывает, что v_i, при данных $v_{i+1}, \ldots, v_n$, имеет

$$\leqslant L_i C H^{i-1} + 1$$

значений. Такое утверждение верно и при $i=1$, если взять $L_1=1$.

Действительно, число случаев, когда v_1, при данных $v_2, \ldots, v_n$, лежит в интервале длиною C, будет

$$\leqslant C+1 = CH^{1-1}+1.$$

Поэтому

$$E < (1+1)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{H}\right)\left(\frac{7}{9}+\frac{1}{H^2}\right)^{n-2} C^n H^{0+1+\ldots+(n-1)} <$$

$$< 5C^n H^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

ЛЕММА 5. *Пусть n целое $\geqslant 2$, $\nu=\frac{1}{n}$, k целое, $U \geqslant 4$,*

$$n < k < \frac{\log U}{-\log(1-\nu)},$$

$$M \geqslant 1,\ p_1 > 2^{Un},$$

$$p_t = p^{(1-\nu)^{t-1}} \quad (t=1, \ldots, k).$$

Пусть, далее, заданы g целых чисел $h, l, \ldots, n$, удовлетворяющих условию

$$0 < h < \ldots < n,$$

и пусть при каждом значении t, независимо от остальных, заданы G_t систем

$$(U_{th}, U_{tl}, \ldots, U_{tn}).$$

Каждая система состоит из целых чисел, удовлетворяющих условию

$$|U_{tr}| \leqslant M p_t^r,$$

причем, каковы бы ни были заданные g интервалов с длинами

$$2Mp_t^{h(1-\nu)},\ 2Mp_t^{l(1-\nu)}, \ldots, 2Mp_t^{n(1-\nu)},$$

число систем $(U_{th}, U_{tl}, \ldots, U_{tn})$, числа которых соответственно лежат в этих интервалах, не превосходит одного и того же числа Φ_t.

Одновременно с системами $(U_{th}, U_{tl}, \ldots, U_{tn})$ рассмотрим системы

$$(U_h, U_l, \ldots, U_n),$$

определяемые равенством

$$U_r = U_{1r} + \ldots + U_{kr} \quad (r=h, l, \ldots, n).$$

Тогда имеем

$$|U_r| < 2Mp_1^r,$$

причем при любых целых $z_h, z_l, \ldots, z_n$ число $\psi(z_h, \ldots, z_n)$ систем $(U_h, U_l, \ldots, U_n)$ с условием

$$U_h = z_h,\ U_l = z_l, \ldots, U_n = z_n$$

удовлетворяет неравенству

$$\psi(z_h, z_l, \ldots, z_n) \leqslant \Phi_1 \ldots \Phi_k.$$

и, кроме того, распространяя суммирование на все возможные системы $(z_h, z_l, \ldots, z_n)$, *имеем*

$$\sum [\psi(z_h, z_l, \ldots, z_n)]^2 \leqslant G_1 \ldots G_k \Phi_1 \ldots \Phi_k.$$

ЛЕММА 6. *Пусть* n *целое* $\geqslant 3$, $\nu = \frac{1}{n}$, $Z \geqslant 1$, k *целое*, $n < k < \frac{\log 3Z(n+1)}{-\log(1-\nu)}$, $b = 2b_1$, *причем имеем в виду два различные предположения* $b_1 = b'$ и $b_1 = b''$, *где*

$$b' = \left[\frac{1}{8}(n+2)(n+3)\right], \quad b'' = \left[\frac{1}{4}(n+1)(n+2)\right];$$

$$\sigma_t = (1-\nu)^{t-1}, \quad \sigma = \sigma_{k+1},$$

p_1 *целое*, $p_1 > [Z(n+1)]^{2Z(n+1)^2 \log eZ}$, $p_t = p_1^{\sigma_t}$.

Пусть, далее, y *вещественное,* $F(z)$ *вещественная функция, в интервале*

$$y \leqslant z \leqslant y + p_1$$

удовлетворяющая условию

$$\left|\frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} - L\right| \leqslant f;$$

$$T_1 = \sum_{x=1}^{p_1} e^{2\pi i F(y+x)},$$

и значения ε *даны следующей таблицей:*

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\geqslant 14$
ε	0.286	0.199	0.146	0.112	0.089	0.073	0.061	0.051	0.044	0.038	0.033	0.030

Тогда

$$|T_1|^{bk}$$

не превосходит числа

$$12.6\, bf p_1^{n+1} p_1^{bk},$$

сложенного с суммою

$$< 2b^k p_1^{bk} (p_1 \ldots p_k)^{-b}$$

слагаемых, каждое из которых имеет вид

$$K = \sum e^{2\pi i (LX_{n+1} + Y_n X_n + \ldots + Y_1 X_1)},$$

где суммирование распространяется на системы целых чисел

$$(X_1, \ldots, X_{n+1}),$$

построенные в зависимости лишь от n, k, p_1. *При этом*

$$|X_r| < 2bp_1^r$$

и число $\psi(z_1, \ldots, z_n)$ *систем с условием*

$$X_1 = z_1, \ldots, X_n = z_n$$

при $b_1 = b'$ *удовлетворяет условию*

$$\sum [\psi(z_1, \ldots, z_n)]^2 < (n^{2b} 2^{4b+n+5} b^n)^k \, p_1^{\frac{n\varepsilon}{Z}} (p_1 \ldots p_k)^{2b - \frac{n+1}{2}},$$

а при $b_1 = b''$ *удовлетворяет условию*

$$\psi(z_1, \ldots, z_n) < (n^b 2^{2b+n+5} b^n)^k \, p_1^{\frac{n\varepsilon}{2Z}} (p_1 \ldots p_k)^{b - \frac{n+1}{2}}$$

Коэффициенты $Y_n, \ldots, Y_1$ *определяются равенством*

$$Y_r = \frac{F^{(r)}(y + x_0)}{r!},$$

где значения x_0, *отвечающие различным* K, *суть целые положительные числа, построенные в зависимости лишь от* n, k, p_1.

Доказательство. Положим

$$\eta_t = [\nu \log p_t \cdot (\log 2)^{-1} + 1],$$
$$R_{ts} = p_t 2^{-s} \quad (s = 1, \ldots, \eta_t),$$
$$q_t = [p_{t-1} p_t^{-1} + 1] \quad (t = 2, \ldots, k).$$

Нетрудно видеть, что

$$p_{t-1} \leqslant p_t q_t \leqslant p_{t-1} + 1, \quad \sigma > \frac{1}{3Z(n+1)},$$

$$p_t > [Z(n+1)]^{\frac{2}{3}(n+1)}, \quad R_{ts} > [Z(n+1)]^{\frac{2}{3}(n-\nu)}, \; p_1 \ldots p_k = p_1^{n - n\sigma}$$

1° Интервал

$$0 < x \leqslant p_1$$

подразделим на q_2 интервалов с одинаковой длиною $\leqslant p_2$. Каждый из этих новых интервалов подразделим на q_3 интервалов с одинаковой длиною $\leqslant p_3$, и т. д.; наконец, получим интервалы с длиною $\leqslant p_k$.

Обозначим общим символом

$$T_t = \sum e^{2\pi i F(y+x)}$$

сумму, где x пробегает значения одного из интервалов, полученных после t-ого подразделения. Для каждой суммы T_t, при $t < k$, имеем

$$T_t = \sum^{q_{t+1}} T_{t+1},$$

где суммирование, обозначенное символом $\sum^{q_{t+1}}$, распространяется на все q_{t+1} сумм T_{t+1}, полученных подразделением интервала суммирования суммы T_t. В частности, имеем

$$T_1 = \sum^{q_2} T_2.$$

Отсюда

$$|T_1|^{bk} = |T_1|^b \left| \sum^{q_2} T_2 \right|^{b(k-1)} \leqslant |T_1|^b \, q_1^{b(k-1)-1} \sum |T_2|^{b(k-1)}$$

Точно так же для каждой суммы T_2 имеем свое равенство вида

$$T_2 = \sum^{q_3} T_3,$$

откуда тем же путем выводим

$$|T_2|^{b(k-1)} \leqslant |T_2|^b q_3^{b(k-2)-1} \sum^{q_3} |T_3|^{b(k-2)}.$$

Далее, находим

$$|T_3|^{b(k-2)} \leqslant |T_3|^b q_4^{b(k-3)-1} \sum^{q_4} |T_4|^{b(k-3)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|T_{k-1}|^{b\cdot 2} \leqslant |T_{k-1}|^b q_k^{b-1} \sum^{q_k} |T_k|^b.$$

Из найденных неравенств выводим

$$|T_1|^{bk} \leqslant q_2^{b(k-1)-1} q_3^{b(k-2)-1} \ldots q_k^{b-1} \sum K_1,$$

где суммирование распространяется на все $q_1 \ldots q_k$ значений K_1 вида

$$K_1 = \prod_{t=1}^{k} Z_t, \quad Z_t = |T_t|^b \tag{2}$$

с условием, что интервал суммирования каждой суммы T_{t+1} ($t = 1, \ldots, k-1$) является частью интервала суммирования суммы T_t. Далее, в виду

$$q_2^{b(k-1)-1} q_3^{b(k-2)-1} \ldots q_k^{b-1} q_2 \ldots q_k =$$
$$= (q_2^{k-1} p_2^{k-1} q_3^{k-2} p_3^{k-2} \ldots q_k p_k)^b (p_2^{k-1} p_3^{k-2} \ldots p_k)^{-b} \leqslant$$
$$\leqslant (p_1^{k-1} p_2^{k-2} \ldots p_{k-1})^b (p_2^{k-1} \ldots p_k)^{-b} \left[\left(1+\frac{1}{p_1}\right)^{k-1} \ldots \left(1+\frac{1}{p_{k-1}}\right)^1\right]^b <$$
$$< 2p_1^{bk} (p_1 \ldots p_k)^{-b},$$

уже не заботясь о том, чтобы одни и те же слагаемые K_1 не повторялись, мы можем короче сказать, что

$$|T_1|^{bk}$$

не превосходит суммы

$$2p_1^{bk} (p_1 \ldots p_k)^{-b}$$

слагаемых вида K_1.

Пусть

$$e^{2\pi i F(y+x_0)}$$

одно из слагаемых суммы T_k. Это слагаемое является общим для всех сумм $T_1, \ldots, T_k$ (T_{t+1} является частью T_t). Подстановкой $x = x_0 + v_t$ сумма T_t приводится к виду

$$T_t = \sum_{v_t} e^{2\pi i \varphi(v_t)}, \quad \varphi(v_t) = F(y + x_0 + v_t).$$

где v_t пробегает все целые числа некоторого интервала

$$-\omega < v_t \leqslant p_t - \omega, \quad 0 < \omega \leqslant p_t,$$

или же часть этих целых чисел. Применяя формулу Тайлора, имеем

$$\varphi(v_t) = Y' v_t^{n+1} + Y_n v_t^n + \ldots + Y_1 v_t + Y_0,$$

где $Y_n, \ldots, Y_1$ действительно имеют вид, указанный в формулировке леммы.

Кроме того,

$$Y_0 = F(y + x_0), \quad Y' = \frac{F^{(n+1)}(y + x_0 + \zeta)}{(n+1)!}, \quad 0 < x_0 + \zeta < p_t.$$

Следовательно,

$$Y' v_t^{n+1} = L v_t^{n+1} + \theta f p_t^{n+1}$$

и потому

$$\varphi(v_t) = L v_t^{n+1} + Y_n v_t^n + \ldots + Y_1 v_t + Y_0 + \theta d, \quad d = f p_t^{n+1}$$

2° Вспоминая, что $b = 2b_1$, имеем

$$Z_t = (|T_1|^2)^{b_1} = \Big(\sum_{v_t} e^{2\pi i \varphi(v_t)} \sum_{v_t} e^{-2\pi i \varphi(v_t)}\Big)^{b_1}$$

Отсюда видим, что Z_t есть произведение $b = 2b_1$ сумм, из которых b_1 равны T_t и b_1 равны сумме, сопряженной с T_t.

Разбивая интервал суммирования каждой из этих $2b_1$ сумм на 2^s интервалов, каждый длиною R_{ts}, мы каждую сумму разобьем на 2^s сумм, соответственно чему произведение Z_t разобьется на 2^{sb} произведений. Каждое из этих новых произведений мы будем обозначать одним и тем же символом Z_{ts}. Оно будет состоять из $b = 2b_1$ сомножителей вида

$$\sum e^{2\pi i \varkappa \varphi(v_t)},$$

где $\varkappa = \pm 1$ (для половины сомножителей $\varkappa = 1$, для другой половины сомножителей $\varkappa = -1$) и v_t пробегает целые числа (опять-таки все или некоторую часть) интервала, имеющего вид

$$-\omega + (g-1) R_{ts} < v_t \leqslant -\omega + g R_{ts}.$$

Это число g назовем номером сомножителя.

Если среди номеров всех сомножителей произведения Z_{ts} можно выбрать n номеров с условием, что разность между каждыми двумя из них численно > 1, то произведение Z_{ts} назовем правильным. В противном случае произведение Z_{ts} назовем неправильным. Очевидно, для неправильного Z_{ts} можно указать $r \leqslant n-1$ чисел

$$g_1, \ldots, g_r$$

с условием, что номера сомножителей могут равняться лишь $2r$ числам

$$g_1, \ldots, g_r, \quad g_1 + 1, \ldots, g_r + 1.$$

Отсюда нетрудно подсчитать число B_{ts} неправильных Z_{ts}. Действительно, все неправильные Z_{ts} можно разбить на группы, относя к од-

ной и той же группе произведения с одинаковыми $g_1, \ldots, g_r$. Число групп, отвечающих данному r, очевидно, будет

$$< 2^{sr}.$$

В каждой же группе будет

$$\leqslant (2r)^b$$

произведений. Поэтому

$$B_{ts} < \sum_{r=1}^{n-1} 2^{sr}(2r)^b < (2n)^b \cdot 2^{sn}. \tag{3}$$

Правильные произведения Z_{t1} назовем произведениями Z'_{t1}. При $s = 1, \ldots, \eta_t - 1$ правильные произведения $Z_{t,s+1}$, полученные подразделением интервалов суммирования сомножителей неправильных Z_{ts}, назовем произведениями Z'_{ts}. Все произведения $Z_{t\eta_t}$, получаемые подразделением интервалов неправильных Z_{t,η_t-1}, назовем произведениями $Z'_{t\eta_t}$. Пусть E_{ts} число произведений Z'_{ts}. В виду (3) при $s > 1$ имеем

$$E_{ts} < (2n)^b 2^{s(n-1)+b}, \tag{4}$$

что, очевидно, верно и при $s = 1$.

Имеем

$$Z_t = \sum_{s=1}^{\eta_t} \Xi_{ts}, \quad \Xi_{ts} = \sum{}' Z'_{ts}. \tag{5}$$

3° Рассмотрим теперь какое-либо определенное Z'_{ts}. Пусть $s < \eta_t$ и

$$g_1 < g_2 < \ldots < g_n,$$

расположенные в порядке возрастания номера тех n сомножителей, которые упоминались в определении Z_{ts}. Тогда имеем

$$g_{j+1} - g_j \geqslant 2 \quad (j = 1, \ldots, n-1).$$

Переменные, пробегающие значения v_t, отвечающие этим сомножителям, обозначим символами

$$v_{ts1}, \ldots, v_{tsn}.$$

Переменные, пробегающие значения v_t, отвечающие оставшимся $b - n$ сомножителям, расположенные в каком-либо определенном порядке, обозначим символами

$$v_{ts,n+1}, \ldots, v_{tsb}.$$

Тогда, согласно 2°, имеем

$$Z'_{ts} = \sum_{v_{ts1}} e^{2\pi i \varkappa_1 \varphi(v_{ts1})} \ldots \sum_{v_{tsb}} e^{2\pi i \varkappa_b \varphi(v_{tsb})},$$

где b_1 из чисел $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_b$ равны 1, а остальные b_1 из этих чисел равны -1. Отсюда находим

$$\begin{gathered} Z'_{ts} = \sum e^{2\pi i (L V_{ts,n+1} + Y_n V_{tsn} + \ldots + Y_1 V_{ts1} + \theta D)}, \quad D = bfp_t^{n+1}, \\ V_{tsr} = \varkappa_1 v_{ts1}^r + \ldots + \varkappa_n v_{tsn}^r + \varkappa_{n+1} v_{ts,n+1}^r + \varkappa_b v_{tsb}^r \end{gathered} \tag{6}$$

Очевидно,

$$|V_{tsr}| \leqslant bp_t^r.$$

Пусть F_{ts} обозначает число слагаемых суммы (6) с условием, что

$$V_{ts1}, \ldots, V_{tsn}$$

лежат в заданных интервалах с длинами

$$2bp_t^{1-\nu}, \quad 2bp_t^{2(1-\nu)}, \ldots, 2bp_t^{n(1-\nu)}.$$

Число систем

$$v_{ts,n+1}, \ldots, v_{tsb}$$

будет

$$< (R_{ts}+1)^{b-n} < 2p_t^{b-n}\, 2^{-s(b-n)}$$

Для каждой такой системы суммы

$$\varkappa_1 v_{ts1} + \ldots + \varkappa_n v_{tsn}, \ldots, \varkappa_1 v_{ts1}^n + \ldots + \varkappa_n v_{tsn}^n$$

будут лежать в определенных интервалах с длинами

$$2bp_t^{1-\nu}, \quad 2bp_t^{2(1-\nu)}, \ldots, 2bp_t^{n(1-\nu)}$$

В виду

$$\left(\frac{p_t^{1-\nu}}{1}+1\right)\left(\frac{p_t^{2(1-\nu)}}{p_t}+1\right)\ldots\left(\frac{p_t^{n(1-\nu)}}{p_t^{n-1}}+1\right) < 3p_t^{\frac{n-1}{2}}$$

и леммы 4, число таких случаев будет

$$< 16\,(2b)^n p_t^{\frac{n-1}{2}}\, 2^{s\frac{n(n-1)}{2}}$$

Поэтому

$$F_{ts} < 32\,(2b)^n p_t^{b-\frac{n+1}{2}}\, 2^{-s(b-n)+s\frac{n(n-1)}{2}} \tag{7}$$

Далее Ξ_{ts} можно представить в форме

$$\Xi_{ts} = \sum e^{2\pi i(LU_{ts,n+1} + Y_n U_{tsn} + \ldots + Y_1 U_{ts1} + \theta D)}, \tag{8}$$

где суммирование распространяется на системы

$$U_{ts1}, \ldots, U_{tsn} \tag{9}$$

с условием

$$|U_{tsr}| \leqslant bp_t^r,$$

причем при $s < \eta_t$ число Φ_{ts} случаев, когда $U_{ts1}, \ldots, U_{tsn}$ лежат в заданных интервалах с длинами

$$2bp_t^{1-\nu}, \ldots, 2bp_t^{n(1-\nu)},$$

согласно (4) и (7) удовлетворяет неравенству

$$\Phi_{ts} < 32 \cdot 2^n b^n (4n)^b\, p_t^{b-\frac{n+1}{2}}\, 2^{-s(b-n)+s\frac{n(n+1)}{2}} \tag{10}$$

Дополнительно к этому число G_{ts} систем (9), т. е. число слагаемых суммы (8) при $s=1, \ldots, \eta_t$ удовлетворяет неравенству

$$G_{ts} < (4n)^b 2^{sn} R_{ts}^b = (4n)^b p_t^b 2^{-s(b-n)} \tag{11}$$

В частности, в виду

$$2^{\eta_t} > p_t^{\nu}, \quad p_t^{\frac{n+1}{2}} < 2^{\eta_t \frac{n(n+1)}{2}},$$

отсюда имеем

$$\Phi_{t\eta_t} \leqslant G_{t\eta_t} < (4n)^b p_t^{b-\frac{n+1}{2}} 2^{-\eta_t(b-n)+\eta_t \frac{n(n+1)}{2}}$$

Следовательно, неравенство (10) верно и для $s=\eta_t$.

4° Выберем теперь соответственно каждому t свое s_t и рассмотрим произведение

$$\Omega(s_1, \ldots, s_k) = \prod_{s=1}^{k} \Xi_{ts_k}.$$

Из (2) и (5) имеем

$$K_1 = \sum{}' \Omega(s_1, \ldots, s_k), \tag{12}$$

где каждое s_t независимо от остальных пробегает значения

$$s_t = 1, \ldots, \eta_t.$$

В виду (8) находим

$$\Omega(s_1, \ldots, s_k) = \sum e^{2\pi i(LU_{n+1} + Y_n U_n + \ldots + Y_1 U_1 + \theta H)}, \tag{13}$$

где

$$U_r = U_{1s_1r} + \ldots + U_{ks_kr},$$
$$|U_{ts_tr}| \leqslant bp_t^r$$

и, кроме того, в виду

$$bf(p_1^{n+1} + \ldots + p_k^{n+1}) < 2bfp_1^{n+1},$$

можно положить

$$H = 2bfp_1^{n+1}$$

Применим лемму 5, взяв $M=b$. Тогда окажется

$$|U_r| < 2bp_1^r.$$

Далее при $b_1 = b'$ число $\psi_1(z_1, \ldots, z_n)$ систем $(U_1, \ldots, U_n)$ с условием

$$U_1 = z_1, \ldots, U_n = z_n$$

удовлетворяет неравенству

$$\sum [\psi_1(z_1, \ldots, z_n)]^2 < G_{1s_1} \ldots G_{ks_k} \Phi_{1s_1} \ldots \Phi_{ks_k}.$$

Но, применяя обозначение $\sum'$ равенства (12), при заданных $z_1, \ldots, z_n$, имеем

$$\psi(z_1, \ldots, z_n) = \sum{}' \psi_1(z_1, \ldots, z_n),$$

$$[\psi(z_1, \ldots, z_n)]^2 \leqslant \eta_1 \ldots \eta_k \sum{}' [\psi_1(z_1, \ldots, z_n)]^2,$$

откуда, суммируя на все $z_1, \ldots, z_n$, находим

$$\sum [\psi(z_1, \ldots, z_n)]^2 \leqslant \eta_1 \ldots \eta_k \sum{}' \sum [\psi_1(z_1, \ldots, z_k)]^2 <$$
$$< (\eta_1 \ldots \eta_k)^2 G_{1s_1} \ldots G_{ks_k} \Phi_{1s_1} \ldots \Phi_{ks_k},$$

что, в виду (10) и (11), будет

$$< (\eta_1 \ldots \eta_k)^2 (32 \cdot 2^n \cdot b^n n^{2b})^k 2^{4bk} (p_1 \ldots p_k)^{2b - \frac{n+1}{2}} (2^{s_1 + \ldots + s_k})^{-2(b-n) + \frac{n(n+1)}{2}}$$

Но имеем

$$-2(b-n) + \frac{n(n+1)}{2} < 0,$$

$$(\eta_1 \ldots \eta_k)^2 < [\nu \log p_1 (\log 2)^{-1}]^{2k} = p_1^{\frac{n\gamma}{Z}},$$

$$\gamma = \frac{2k \log [\nu \log p_1 (\log 2)^{-1}]}{\frac{n}{Z} \log p_1},$$

$$\gamma < \frac{\log [\nu \cdot 2Z(n+1)^2 \cdot \log eZ \cdot \log Z(n+1)(\log 2)^{-1}]}{(n+1)^2 \cdot \log eZ \cdot \log Z(n+1)} \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \log 3Z(n+1).$$

При данном n, наибольшее значение правая часть имеет, если $Z=1$. Отсюда находим

$$\gamma < \varepsilon,$$

где ε действительно имеет значения, указанные в условиях леммы. Поэтому

$$\sum [\psi(z_1, \ldots, z_n)]^2 < (n^{2b} 2^{4b+n+5} b^n)^k p_1^{\frac{n\varepsilon}{Z}} (p_1 \ldots p_k)^{2b - \frac{n+1}{2}}.$$

Пусть теперь $b_1 = b''$. Тогда из леммы 5 следует

$$\psi_1(z_1, \ldots, z_n) < \Phi_{1s_1} \ldots \Phi_{ks_k},$$

откуда

$$\psi(z_1, \ldots, z_n) < \eta_1 \ldots \eta_k \Phi_{1s_1} \ldots \Phi_{ks_k} <$$
$$< (n^b 2^{2b+n+5} b^n)^k p_1^{\frac{n\varepsilon}{2Z}} (p_1 \ldots p_k)^{b - \frac{n+1}{2}}$$

Наконец, замечая, что при вещественном α

$$|e^{\pm 2\pi i\alpha} - 1| < 2 \sin \pi\alpha < 2\pi\alpha,$$

убеждаемся, что отбрасывая θH в показателях суммы (13), мы изменим $|T_1|^{bk}$ на величину, модуль которой

$$< 12.6 b f p_1^{n+1} p_1^{bk}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть n целое $\geqslant 13$, $\nu_1 = \frac{1}{n+1}$, m целое > 0, Q целое, P целое > 0, $a_{n+1}, \ldots, a_1$ вещественные,*

$$a_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1,$$

$$F(z) = a_{n+1} z^{n+1} + \ldots + a_1 z, \qquad S = \sum_{z=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i m F(z)}.$$

Тогда имеем

1) $|S| < 16nPq^{-\rho}, \ \rho = \frac{}{(n+1)^3 \log (n+1)},$

если

$$1 \leqslant q \leqslant P, \quad m \leqslant q^{\nu_1^3};$$

2) $|S| < 8\mu (n+1) P^{1-\rho}, \quad \rho = \frac{1}{(n+1)^3 \log \mu (n+1)};$

если

$$P \leqslant q \leqslant P^n, \quad m \leqslant P^{\nu_1^3}, \quad q = P^{\mu};$$

3) $|S| < 8 \frac{(n+1)^2}{\tau^2} P^{1-\rho}, \quad \rho = \frac{\tau}{(n+1)^3 \log \frac{(n+1)^2}{\tau}},$

если

$$P^n \leqslant q < P^{n+1-5\nu_1^3}, \quad m \leqslant P^{\tau\nu_1^3}, \quad q = P^{n+1-\tau}.$$

Доказательство. 1° Пусть сначала

$$P \leqslant q \leqslant P^{n-\nu_1^3}, \quad m = P^{\nu_1^3}.$$

Положим

$$b = 2 \left[\frac{1}{8} (n+2)(n+3) \right], \quad \nu = \frac{1}{n},$$

$$q = P^{\mu}, \quad k = \left[\frac{\log 2\mu (n+1)}{-\log (1-\nu)} + 1 \right], \quad p_1 = [q^{\nu}].$$

Сначала рассмотрим случай

$$q > [\mu (n+1)]^{2\mu(n+1)^3 \log e\mu}$$

Тогда окажется

$$k < \frac{\log 3\mu (n+1)}{-\log (1-\nu)}, \quad p_1 > [\mu (n+1)]^{2\mu(n+1)^2 \log e\mu}, \quad 1 \leqslant \mu < n.$$

Имеем

$$S = \sum_{y=Q+1}^{Q+P-p_1} T_1 + \theta p_1^2, \qquad T_1 = \sum_{x=1}^{p_1} e^{2\pi i F(y+x)},$$

$$S = \frac{1}{p_1} \sum_{y} T_1 + \theta p_1.$$

Отсюда имеем

$$|S| < \frac{1}{p_1} \left(P^{bk-1} \sum_{y} |T_1|^{bk} \right)^{\frac{1}{bk}} + p_1. \qquad (14)$$

К выражению

$$|T_1|^{bk}$$

мы применим лемму 6, сохраняя все ее обозначения. Суммируя по y какое-либо одно значение K этой леммы, имеем

$$\sum_{y} K < \sum_{z=-\zeta_1}^{\zeta_1} \ldots \sum_{z_n=-\zeta_n}^{\zeta_n} \psi(z_1, \ldots, z_n) \left| \sum_{y} e^{2\pi i(\gamma_n z_n + \ldots + \gamma_1 z_1)} \right|,$$

где

$$\zeta_r = 2bp_1^r - 1,$$

$$\sum_{z_1}\cdots\sum_{z_n}[\psi(z_1,\ldots,z_n)]^2\leqslant W,\quad W=(n^{2b}2^{4b+n+5}b^n)^k p_1^{\frac{\varepsilon n}{\mu}}(p_1\ldots p_k)^{2b-\frac{n+1}{2}},$$

$$Y_n=(n+1)\,ma_{n+1}y+ma_n. \tag{15}$$

Далее находим

$$\sum_y K\leqslant\sqrt{W\sum_{z_1}\cdots\sum_{z_n}\sum_y\sum_{y_1}e^{2\pi i[(n+1)ma_{n+1}(y-y_1)z_n+\ldots+(Y_1-Y_1')z_1]}}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{W\cdot 4^{n-1}b^{n-1}p_1^{\frac{n(n+1)}{2}-n}G},\quad G=\sum_y\sum_{y_1}\min\left(4bp_1^n,\frac{1}{2\,((n+1)\,ma_{n+1}(y-y_1))}\right).$$

К последней сумме мы применим лемму 2. Получим

$$G<(P-p_1)\left(\frac{P-p_1}{q}+1\right)[5\,(n+1)\,m\cdot 4\,bp_1^n+q\log q]<$$
$$<Pp_1^n[40\,(n+1)\,mb+4\log q]<4Pp_1^n\,bm\log P.$$

Поэтому

$$\sum_y K<\sqrt{Wm\cdot 4^n\cdot b^n p_1^{\frac{n(n+1)}{2}}P\log P}\,.$$

Следовательно, в виду леммы 6 и (15), имеем

$$\sum_y|T_1|^{bk}<\sqrt{4m\cdot 4^n b^{n+2k}\,(n^{2b}2^{4b+n+5}b^n)^k p_1^{2bk+\frac{n\varepsilon}{\mu}+\frac{\sigma n\,(n+1)}{2}}P\log P}\,.$$

А тогда из формулы (14) выводим

$$|S|<P\,[4^{n+1}b^n\,(n^{2b}\cdot 2^{4b+n+5}b^{n+2})^k\,mp_1^{\frac{n\varepsilon}{\mu}+\frac{\sigma n\,(n+1)}{2}}P^{-1}\log P]^{\frac{1}{2bk}}+p_1.$$

Но здесь имеем

$$\nu_1^3<0.0004,\quad \varepsilon=0.033,\quad \frac{\sigma\,(n+1)\,\mu}{2}<0.25,\quad \log P<P^{0.001},$$

$$\frac{\nu_1^3+\varepsilon+\frac{\sigma\,(n+1)\,\mu}{2}-1+0.001}{2\,bk}$$

$$<\frac{-0.715}{\frac{1}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{n+3}{n+1}\cdot\frac{2n-1}{2n+2}\cdot\frac{\log 2\,(n+1)}{\log\,(n+1)}\,(n+1)^3\log\mu\,(n+1)}<$$

$$<\frac{1.03}{(n+1)^3\log\mu\,(n+1)},$$

$$4^{n+1}b^n<(2b)^{0.23k},\quad 2^{n+5.23}\,b^{n+2.23}<1.9^{2b}.$$

Поэтому

$$|S|<7.6P^{1-\frac{1.03}{(n+1)^3\log\mu(n+1)}}+P^{1-\frac{1}{(n+1)^3}}<7.8P^{1-\frac{1.03}{(n+1)^3\log\mu(n+1)}}.$$

Таким образом для рассматриваемых значений q теорема доказана.

Для малых значений q теорема проверяется непосредственно.

2° Случай 1° нашей теоремы непосредственно следует из результатов, полученных при выводе только что рассмотренного случая.

Пусть сначала

$$q>[1.001\,(n+1)]^{2\cdot 1.001(n+1)^3\log 1.001e}.$$

Сумму S мы разобьем на

$$\leqslant \frac{P}{q}+1 \leqslant 2\frac{P}{q}$$

сумм вида

$$S_1 = \sum_{x=Q+1}^{Q+P_1} e^{2\pi i m f(x)}$$

с условием

$$P_1 \leqslant q \leqslant 2P_1.$$

Здесь имеем

$$\mu_1 = \frac{\log q}{\log P_1} < 1.001.$$

Поэтому

$$|S_1| < 7.8n\mu_1 P_1^{1-\frac{1.03}{(n+1)^3 \log \mu_1 (n+1)}} < 8nP_1^{1-\frac{1}{(n+1)^3 \log (n+1)}} <$$

$$< 8nq^{1-\frac{1}{(n+1)^3 \log (n+1)}}, \quad |S| < 16nPq^{-\frac{1}{(n+1)^3 \log (n+1)}}$$

Если теперь

$$q < [1.001\,(n+1)]^{2\cdot 1.001\,(n+1)^3 \log 1.001\, e},$$

то теорема проверяется непосредственно.

3° Пусть

$$P^{n-\nu_1^2} \leqslant q < P^{n+1-5\nu_1^3}, \quad q = P^{n+1-\tau}, \quad m \leqslant P^{\tau\nu_1^3}$$

и, следовательно,

$$0 < \tau \leqslant 1+\nu_1^2.$$

Положим

$$b = 2\left[\frac{1}{8}(n+2)\,(n+3)\right],$$

$$\tau = \frac{n+1+\nu_1}{Z}, \quad k = \left[\frac{\log 2Z\,(n+1)}{-\log(1-\nu)}+1\right], \quad p_1 = [P^{1-\tau\nu_1^3}].$$

Тогда

$$k < \frac{3Z\,(n+1)}{-\log(1-\nu)}.$$

Сначала рассмотрим случай

$$p_1 > [Z\,(n+1)]^{2Z(n+1)^2 \log eZ}$$

Повторяя рассуждения вывода 1°, найдем

$$|S| < \frac{1}{p_1}\left(P^{bk-1}\sum_y |T_1|^{bk}\right)^{\frac{1}{bk}} + p_1, \quad T_1 = \sum_{x=1}^{p_1} e^{2\pi i m F(y+x)}. \qquad (16$$

К выражению

$$|T_1|^{bk}$$

применим лемму 6. Суммируя по y какое-либо одно значение K, получим

$$\sum_y K \leqslant \sqrt{W\cdot 4^{n-1} b^{n-1} p_1^{\frac{n(n+1)}{2}-n} G},$$

$$W = (n^{2b}\cdot 2^{4b+n+5} b^n)^k p_1^{\frac{n\varepsilon}{Z}} (p_1 \ldots p_k)^{2b-\frac{n+1}{2}},$$

$$G < (P - p_1)\left(\frac{P - p_1}{q} + 1\right)[5(n+1)m \cdot 4bp_1^n + q\log q] <$$
$$< 2P\,[20(n+1)\,bP^{\tau\nu_1^3}p_1^n + 2p_1^n P^{\tau n\nu_1^3 + 1 - \tau}(n+1)\log P] <$$
$$< 4mbp_1^n P^{2-\tau+\tau\nu_1^2}\log P. \qquad (17)$$

Поэтому

$$\sum K < \sqrt{Wm4^n b^n p_1^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{2-\tau+\tau\nu_1^2}\log P}.$$

Следовательно, в виду леммы 6 и (17) имеем

$$|T_1|^{bk} < \sqrt{4m \cdot 4^n b^{n+2k}(n^{2b} \cdot 2^{4b+n+5}b^n)^k p_1^{2bk + \frac{n\varepsilon}{Z} + \frac{\sigma n(n+1)}{2}} P^{2+\tau\nu_1^2 - \tau}\log P}.$$

А тогда из формулы (16) выводим

$$|S| < 7.6n\,(P^{\varepsilon\tau + \frac{\sigma n(n+1)}{2} + \tau\nu_1^2 - \tau}\log P)^{\frac{1}{2bk}} + P^{1-\tau\nu_1^3}.$$

Но здесь имеем

$$\frac{\sigma n(n+1)}{2} \leqslant \frac{n}{4Z} < \frac{\tau}{4}, \quad \nu_1^2 + \nu_1^3 < 0.006, \quad \varepsilon = 0.033,$$
$$\log P < P^{0.061\tau},$$
$$-1 + 0.25 + 0.006 + 0.033 + 0.061 < -0.65.$$

Поэтому

$$|S| < 7.6nP^{1-\frac{0.65\tau}{2bk}} + P^{1-\tau\nu_1^3} < 7.8nP^{1-\frac{0.65\tau}{2bk}} < 7.8n\,P^{1-\frac{1.03\tau}{(n+1)^3\log\frac{(n+1)^2}{\tau}}}.$$

В случае

$$p_1 < [Z(n+1)]^{2Z(n+1)^2\log cZ}$$

теорема проверяется непосредственно.

4° Пусть теперь

$$P^{n-\nu_1^2} \leqslant q \leqslant P^n.$$

Тогда из доказанного в 3° следует

$$|S| < 7.8nP^{1-\frac{\tau}{(n+1)^3\log\frac{(n+1)^2}{\tau}}},$$

уда непосредственно следует теорема и для оставшейся нрассмотречной части случая 1°.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть n целое $\geqslant 14$, Q и P целые, $P > 0$, $F(z)$ вещественная функция в интервале*

$$Q < z \leqslant Q + P,$$

удовлетворяющая условиям

$$\frac{1}{A} \leqslant \frac{F^{(n)}(z)}{n!} \leqslant \frac{l}{A}, \quad \left|\frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\right| \leqslant \frac{h}{AP^{2/3}},$$

где

$$P \leqslant A \leqslant P^2, \quad l \leqslant 2^n, \; h \leqslant 2^n.$$

Пусть далее

$$S = \sum_{z=Q+1}^{Q+P} e^{\pm 2\pi i F(z)},$$

где знак $\pm$ *берется произвольно.*

Тогда имеем

$$|S| \leqslant 8nP^{1-\rho}, \quad \rho = \frac{1}{(n+1)^3 \log(n+1)}.$$

Доказательство. Достаточно доказывать теорему лишь для случая, когда в показателях слагаемых суммы S стоит знак $+$. Положим

$$b = 2\left[\frac{1}{8}(n+2)(n+3)\right], \quad \nu = \frac{1}{n},$$

$$A = P^Z, \quad k = \left[\frac{\log 2Z(n+1)}{-\log(1-\nu)}\right], \quad p_1 = [A^{\frac{1}{n-1}}].$$

1° Сначала рассмотрим случай

$$A \geqslant [Z(n+1)]^{2Z(n+1)^3 \log_e Z}$$

Тогда окажется

$$k < \frac{\log 3Z(n+1)}{-\log(1-\nu)}, \quad p_1 > [Z(n+1)]^{2Z(n+1)^2 \log_e Z}, \qquad 1 \leqslant Z \leqslant 2.$$

Имеем

$$S = \sum_{y=Q+1}^{Q+P-p_1} T_1 + \theta p_1^2, \quad T_1 = \sum_{x=1}^{p_1} e^{2\pi i F(y+x)},$$

$$S = \frac{1}{p_1}\sum_y T_1 + \theta p_1.$$

Отсюда находим

$$S < \frac{1}{p_1}\left(P^{bk-1}\sum_y |T_1|^{bk}\right)^{\frac{1}{bk}} + p_1. \tag{18}$$

К выражению $|T_1|^{bk}$ мы применим лемму 6, сохраняя все ее обозначения. Суммируя по y какое-либо одно значение K этой леммы, имеем

$$\sum_y K < \sum_{z_1=-\zeta_1}^{\zeta_1} \cdots \sum_{z_n=-\zeta_n}^{\zeta_n} \psi(z_1, \ldots, z_n) \left|\sum_y e^{2\pi i (Y_n z_n + \ldots + Y_1 z_1)}\right|,$$

где

$$\zeta_r = 2bp_1^r - 1,$$

$$\sum_{z_1} \cdots \sum_{z_n} [\psi(z_1, \ldots, z_n)]^2 \leqslant W,$$

$$W = (n^{2b} 2^{4b+n+5} b^n)^k p_1^{\frac{n\varepsilon}{Z}} (p_1 \ldots p_k)^{2b - \frac{n+1}{2}}, \tag{19}$$

$$Y_n = \frac{F^{(n)}(y+x_0)}{n!}, \quad Y_{n-1} = Y_{n-1}(y) = \frac{F^{(n-1)}(y+x_0)}{(n-1)!}.$$

Далее находим

$$\sum_y K \leqslant \sqrt{W \sum_{z_1} \ldots \sum_{z_n} \sum_y \sum_{y_1} e^{2\pi i [(Y_n - Y'_n) z_n + \ldots + (Y_1 - Y'_1) z_1]}} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{W 4^{n-1} b^{n-1} p_1^{\frac{n(n+1)}{2} - n + 1} G}, \quad G = \sum_y \sum_{y_1} \min\left(4bp_1^{n-1}, \frac{1}{2(Y_{n-1} - Y'_{n-1})}\right).$$

Но имеем

$$\frac{F^{(n-1)}(y+1+x_0) - F^{(n-1)}(y+x_0)}{(n-1)!} = \frac{F^{(n+1)}(y+\theta+x_0)}{(n-1)!}$$

и, следовательно,

$$\frac{n}{A} \leqslant Y_{n-1}(y+1) - Y_{n-1}(y) \leqslant \frac{nl}{A}.$$

Отсюда, согласно лемме 3, имеем

$$G < (P - p_1)\left(\frac{(P-p_1)nl}{A - nl - 1} + 1\right)(8bp_1^{n-1} + A \log A) <$$

$$< P \cdot 2nl \cdot bp_1^{n-1} \log A\left(\frac{8}{\log A} + \frac{1.5}{b}\right) < 4lbp_1^{n-1} P \log P.$$

Поэтому

$$\sum_y K < \sqrt{Wl4^n b^n p_1^{\frac{n(n+1)}{2}} P \log P}.$$

Следовательно, в виду леммы 6 и (19), имеем

$$|T_1|^{bk} < 12.6bhp_1^{2+bk} +$$

$$+ \sqrt{4^{n+1} lb^{n+2k} (n^{2b} 2^{4b+n+5} b^n)^k p_1^{2bk + \frac{n\varepsilon}{Z} + \frac{\sigma n(n+1)}{2}} P \log P}.$$

А тогда из формулы (18) выводим

$$|S| < P\left(12.6bhP^{\frac{4}{n-1} - \frac{2}{3}} +\right.$$

$$\left.+ \sqrt{8^{n+1} b^n (n^{2b} 2^{4b+n+5} b^{n+2})^k P^{\frac{n\varepsilon}{n-1} + \frac{\sigma n(n+1)\mu}{2(n-1)} - 1} \log P}\right)^{\frac{1}{bk}} + p_1.$$

Но здесь имеем

$$\frac{4}{n-1} - \frac{2}{3} \geqslant \frac{4}{13} - \frac{2}{3} > -0.3485, \quad \frac{\varepsilon n}{n-1} < 0.0324,$$

$$\frac{\sigma n(n+1)\mu}{2(n-1)} \leqslant \frac{n}{4(n-1)} < 0.2693, \ \log P < P^{0.001},$$

$$\sqrt{P^{\frac{n\varepsilon}{n-1} + \frac{\sigma n(n+1)\mu}{2(n-1)} - 1} \log P} < P^{-0.3485},$$

$$8^{n+1} b^n < (2b)^{0.26k}, \quad 2^{n+5.26} b^{n+2.26} < 1.9^{2b}, \quad 12.5bh < 1.01^{bk}.$$

Поэтому

$$S < Pn(1.01^{bk} + 1.9^{bk})^{\frac{1}{bk}} P^{-\frac{0.3485}{bk}} + p_1 < 7.8nP^{1 - \frac{0.3485}{bk}}.$$

Но имеем

$$-\frac{0.3485}{bk} < -\frac{0.3485}{\frac{1}{4}(n+2)(n+3)\left(n-\frac{1}{2}\right)\log 4(n+1)} <$$

$$< \frac{-1.394}{\frac{16}{15}\cdot\frac{17}{15}\cdot\frac{27}{30}\cdot\frac{\log 60}{\log 30}(n+1)^3\log 2(n+1)} < \frac{-1.06}{(n+1)^3\log 2(n+1)}.$$

Таким образом теорема доказана для рассматриваемых значений A.

2° В случае

$$A < [Z(n+1)]^{2Z(n+1)^3\log eZ}$$

теорема проверяется непосредственно.

Математический институт
им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
11. XI. 1938.

I. VINOGRADOW. ESTIMATIONS OF TRIGONOMETRICAL SUMS

SUMMARY

In the present paper I give a simple proof of estimations of trigonometrical sums with numerical values of the coefficients of the estimations.

THEOREM 1. *Let n be an integer* $\geqslant 13$, $\nu_1 = \frac{1}{n+1}$, *m and Q integers, P an integer* > 0, $a_{n+1}, \ldots, a_1$ *real numbers*,

$$a_{n+1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \ (a, q) = 1,$$

$$F(z) = a_{n+1}z^{n+1} + \ldots + a_1 z, \ S = \sum_{z=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i m F(z)}.$$

Then we have:

$$1) \ |S| < 16nPq^{-\rho}, \quad \rho = \frac{1}{(n+1)^3\log(n+1)},$$

if

$$1 \leqslant q \leqslant P, \ m \leqslant q^{\nu_1^3};$$

$$2) \ |S| < 8\mu(n+1)P^{1-\rho}, \quad \rho = \frac{1}{(n+1)^3\log\mu(n+1)},$$

$$P \leqslant q \leqslant P^n, \quad m \leqslant P^{\nu_1^3}, \quad q = P^\mu;$$

$$3) \ |S| < 8\frac{(n+1)^2}{\tau^2}P^{1-\rho}, \quad \rho = \frac{\tau}{(n+1)^3\log\frac{(n+1)^2}{\tau}},$$

if

$$P^n \leqslant q < P^{n+1-5\nu_1^3}, \quad q = P^{n+1-\tau}.$$

THEOREM 2. *Let n be an integer $\geqslant 14$, Q and P integers, $P > 0$, $F(z)$ a real function satisfying the conditions*

$$\frac{1}{A} \leqslant \frac{F^{(n)}(z)}{n!} \leqslant \frac{l}{A}, \quad \left|\frac{F^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\right| \leqslant \frac{h}{AP^{2/3}},$$

in the interval

$$Q < z \leqslant Q + P,$$

where $P \leqslant A \leqslant P^2$, $l \leqslant 2^n$, $h \leqslant 2^n$.

Further let

$$S = \sum_{z=Q+1}^{Q+P} e^{\pm 2\pi i F(z)},$$

where the sign $\pm$ is to be taken arbitrary. Then we have

$$|S| \leqslant 8nP^{1-\rho}, \quad \rho = \frac{1}{(n+1)^3 \log(n+1)}.$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

В. И. ЛЕВИН

О НЕРАВЕНСТВАХ. IV *

К НЕРАВЕНСТВУ HILBERT'A-RIESZ'A

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Настоящая статья посвящена изучению одного интегрального неравенства типа Hilbert'a, именуемого неравенством Hilbert'a-Riesz'a, и содержит его уточнение с наилучшей константой, а также обобщения на ядра с логарифмически усиленной особенностью.

Пусть $p > 1,\ q > 1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q} > 1,$

$$0 < \lambda = 2-\frac{1}{p}-\frac{1}{q} = \frac{1}{p'}+\frac{1}{q'} < 1,$$

где $\frac{1}{p'}=1-\frac{1}{p},\ \frac{1}{q'}=1-\frac{1}{q}$; $f(x)$ и $g(y)$ — неотрицательные измеримые функции, определенные для почти всех вещественных значений x и y и суммируемые соответственно со степенями p и q:

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} f^p(x)\,dx = F^p < \infty,\ 0 < \int_{-\infty}^{\infty} g^q(y)\,dy = G^q < \infty.$$

Тогда

$$J = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\,g(y)}{|x+y|^{\lambda}}\,dx\,dy \leqslant K(p, q)FG, \qquad (1)$$

где $K(p, q)$ зависит только от p и q [1]. Заметим, что наилучшее значение $K(p, q)$ неизвестно ни для одной пары допустимых значений p и q.

Это неравенство уместно назвать неравенством Hilbert'a-Riesz'a, поскольку оно является обобщением известного двупараметрического неравенства Hilbert'a [2] [3] (которое отличается от рассматриваемого тем, что все интегралы распространяются от 0 до ∞), но требует для своего доказательства одной глубокой леммы F. Riesz'a [4]. Что нера-

* Первые три статьи этого цикла: О неравенствах. I, II и III см. Матем. сборник, 3 (45) : 2 (1938) и 4 (46) : 2 (1938). Настоящая статья объединена с предыдущими лишь общей тематикой и от них не зависит.

венство (1) лежит глубже двупараметрического неравенства Hilbert'a, следует уже из того, что в этом последнем ядро $(x+y)^{-\lambda}$ имеет лишь особую *точку* $x=y=0$, в то время как ядро $|x+y|^{-\lambda}$ двойного интеграла левой части неравенства (1) имеет особую *линию* $x+y=0$.

§ 1. Лемма Riesz'a

В виду того что на лемму Riesz'a опирается все последующее, приведем ее формулировку.

Пусть $f(x)$ определена для почти всех вещественных x, неотрицательна, измерима и обладает тем свойством, что для любого $\varepsilon>0$ мера множества значений x, для которых $f(x)>\varepsilon$, конечна. Тогда равноизмеримой с $f(x)$ симметрично убывающей функцией называется функция $f^*(x)$, определенная следующим образом: если мера множества значений x, для которых $f(x)>X$, где $X>0$, есть 2ξ:

$$\operatorname{mes} E\left\{f(x)>X\right\}=2\xi=2\xi(X),$$

то $f^*(\xi)=X$, $f^*(-\xi)=f^*(\xi)$. Функция $f^*(\xi)$ симметрично убывает и определена однозначно, за исключением, быть может, счетного множества значений ξ, являющихся концами интервалов постоянности функции $\xi(X)$. В этих точках мы можем, например, определить $f^*(\xi)$ как

$$\frac{1}{2}\left\{f^*(\xi-0)+f^*(\xi+0)\right\}.$$

Очевидно, что если $F(z)$ есть любая измеримая функция, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} F\left\{f^*(x)\right\}dx=\int_{-\infty}^{\infty} F\left\{f(x)\right\}dx,$$

если этот последний интеграл существует.

Лемма Riesz'a ([4]). Если $f(x)$, $g(y)$, $h(t)$ неотрицательны и измеримы и $f^*(x)$, $g^*(y)$, $h^*(t)$ суть равноизмеримые с ними симметрично убывающие функции, то

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,g(y)\,h(x+y)\,dx\,dy\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\,g^*(y)\,h^*(x+y)\,dx\,dy.$$

§ 2. Уточнение неравенства Hilbert'a-Riesz'a, содержащее наилучшую константу

Неравенство Hilbert'a-Riesz'a (1) доказывается с помощью леммы Riesz'a. Покажем, что более полное использование этой леммы в совокупности с новым методом оценки ведет к несколько более сильному неравенству, содержащему наилучшую константу, из которого, в частности, следует и неравенство (1).

Нашей задачей является оценка интеграла

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,g(y)}{|x+y|^{\lambda}}\,dx\,dy. \tag{2}$$

По лемме Riesz'a,

$$J\leqslant J^{*}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f^{*}(x)\,g^{*}(y)}{|x+y|^{\lambda}}\,dx\,dy, \tag{3}$$

так что достаточно оценить интеграл J^{*}. Заметим, что в силу свойств равноизмеримых функций

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{*p}(x)\,dx=F^{p},\quad \int_{-\infty}^{\infty} g^{*q}(y)\,dy=G^{q}.$$

Для любого $x>0$ имеем

$$\frac{1}{2}F^{p}=\int_{0}^{\infty} f^{*p}(t)\,dt\geqslant\int_{0}^{x} f^{*p}(t)\,dt\geqslant x\,f^{*p}(x),$$

и, следовательно,

$$\alpha^{p}=\sup_{-\infty<x<\infty}|x|\,f^{*p}(x)\leqslant\frac{1}{2}F^{p}; \tag{4}$$

аналогично

$$\beta^{q}=\sup_{-\infty<y<\infty}|y|\,g^{*q}(y)\leqslant\frac{1}{2}G^{q}. \tag{5}$$

Замечая теперь, что $\frac{1}{\lambda p'}+\frac{1}{\lambda q'}=1$, имеем

$$J^{*}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[f^{*}(x)]^{\frac{p}{\lambda q'}}\,[g^{*}(y)]^{1-\frac{q}{\lambda p'}}}{|x+y|^{\frac{1}{q'}}}\left|\frac{y}{x}\right|^{-\frac{1}{\lambda p'q'}}\times$$

$$\times\frac{[f^{*}(x)]^{1-\frac{p}{\lambda q'}}\,[g^{*}(y)]^{\frac{q}{\lambda p'}}}{|x+y|^{\frac{1}{p'}}}\left|\frac{x}{y}\right|^{-\frac{1}{\lambda p'q'}}dx\,dy\leqslant P^{\frac{1}{\lambda q'}}\,Q^{\frac{1}{\lambda p'}}, \tag{6}$$

по неравенству Hölder'a для двух множителей, где

$$P=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[f^{*}(x)]^{p}\,[g^{*}(y)]^{(1-\lambda)q}}{|x+y|^{\lambda}}\left|\frac{y}{x}\right|^{-\frac{1}{p'}}dx\,dy=$$

$$=\int_{x=-\infty}^{\infty} f^{*p}(x)\,dx\int_{y=-\infty}^{\infty}\{\,|y|\,g^{*q}(y)\,\}^{1-\lambda}\,\frac{\left|\frac{y}{x}\right|^{-\frac{1}{q}}}{\left|1+\frac{y}{x}\right|^{\lambda}}\,\frac{dy}{|x|}\leqslant$$

$$\leqslant\beta^{(1-\lambda)q}F^{p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|t|^{-\frac{1}{q}}}{|1+t|^{\lambda}}\,dt, \tag{7}$$

с β, определенным в (5), и аналогично

$$Q \leqslant \alpha^{(1-\lambda)p} G^q \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t|^{-\frac{1}{p}}}{|t+1|^\lambda} dt, \tag{8}$$

с α, определенным в (4).

Знак равенства имеет место в (6) только в том случае, когда f^* и g^* суть соответственно степени от $|x|$ и $|y|$. Это однако несовместимо с условием конечности интегралов F и G.

Таким образом из (2), (3), (6), (7) и (8) следует

ТЕОРЕМА 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\,g(y)}{|x+y|^\lambda} dx\,dy < L(p, q)\,\alpha^\rho \beta^\sigma F^{1-\rho} G^{1-\sigma}$$

где

$$\rho = \frac{q'-p}{q'+p'} \ (0 < \rho < 1), \quad \sigma = \frac{p'-q}{p'+q'} \ (0 < \sigma < 1)$$

и

$$L(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t|^{-\frac{1}{q}}}{|1+t|^\lambda} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t|^{-\frac{1}{p}}}{|t+1|^\lambda} dt =$$

$$= \frac{4}{\pi} \sin\frac{\lambda\pi}{2} \sin\frac{\pi}{2p} \sin\frac{\pi}{2q} \Gamma(1-\lambda)\,\Gamma\left(\frac{1}{p'}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q'}\right)^*. \tag{9}$$

Это значение $L(p, q)$ является наилучшим для каждой данной пары допустимых значений p и q.

В виду соотношений (4) и (5) неравенство теоремы 1 является несколько более сильным, чем неравенство (1), которое из него следует.

Нам остается еще показать, что значение $L(p, q)$ из (9) не может быть улучшено. Для этого положим $f(x) = f_\varepsilon(x)$, $g(y) = g_\varepsilon(y)$, где

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-\frac{1}{p}} & \text{для } 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon, \\ x^{-\frac{1}{p}} & \text{для } \varepsilon \leqslant x \leqslant \frac{1}{\varepsilon}, \\ 0 & \text{для } \frac{1}{\varepsilon} < x, \end{cases} \qquad g_\varepsilon(y) = \begin{cases} \varepsilon^{-\frac{1}{q}} & \text{для } 0 \leqslant y \leqslant \varepsilon, \\ y^{-\frac{1}{q}} & \text{для } \varepsilon \leqslant y \leqslant \frac{1}{\varepsilon}, \\ 0 & \text{для } \frac{1}{\varepsilon} < y, \end{cases}$$

$$f_\varepsilon(-x) = f_\varepsilon(x), \quad g_\varepsilon(-y) = g_\varepsilon(y),$$

и $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Тогда правая часть неравенства теоремы 1 будет равна $L(p, q)\left(4\log\frac{1}{\varepsilon}+2\right)$. Что же касается интеграла

$$J(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_\varepsilon(x)\,g_\varepsilon(y)}{|x+y|^\lambda} dx\,dy,$$

* Это неравенство было приведено в несколько иной форме и без доказательства в одной из моих предыдущих работ ([5]). Указанное там наилучшее значение $L(p, q)$ следует заменить выражением (9).

то простые вычисления показывают, что $J(\varepsilon)=2J_1(\varepsilon)+2J_2(\varepsilon)+O(1)$, где

$$J_1(\varepsilon)=\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{x^{-\frac{1}{p}}y^{-\frac{1}{q}}}{(x+y)^{\lambda}}\,dx\,dy,\quad J_2(\varepsilon)=\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}}\int\limits_{\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}}\frac{x^{-\frac{1}{p}}y^{-\frac{1}{q}}}{|x-y|^{\lambda}}\,dx\,dy.$$

Но

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}J_1(\varepsilon)=2\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{-\frac{1}{q}}}{(1+t)^{\lambda}}\,dt,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}J_2(\varepsilon)=2\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{-\frac{1}{q}}}{|1-t|^{\lambda}}\,dt,$$

и следовательно

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}J(\varepsilon)=4\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{-\frac{1}{q}}}{(1+t)^{\lambda}}\,dt+4\int\limits_0^{\infty}\frac{t^{-\frac{1}{q}}}{|1-t|^{\lambda}}\,dt=4L(p,q).$$

Таким образом в правой части неравенства теоремы 1 $L(p,q)$ не может быть заменено никаким меньшим числом без нарушения справедливости неравенства для некоторых допустимых f и g.

Следует отметить, что теоремой 1 еще не решен вопрос о наилучшем значении $K(p,q)$ в неравенстве (1) [очевидно, по (4) и (5), что (1) имеет место с $K(p,q)=\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\lambda}L(p,q)$].

§ 3. Обобщения неравенства Hilbert'a-Riesz'a

Обратимся теперь к вопросу о том *, насколько можно усилить особенность на линии $x+y=0$ ядра оцениваемого двойного интеграла и при каких условиях этот интеграл еще будет сходящимся.

Введем следующее обозначение:

$$\log' t=\max\left\{1,\ \log t\right\}.$$

Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$, $\lambda=2-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$ *и* r *и* s *— произвольные вещественные числа, подчиненные только условию* $r+s=\mu\geqslant 0$. *Если* $f(x)$ *и* $g(y)$ *неотрицательные измеримые функции, такие, что*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f^*(x)\left\{\log'\frac{1}{|x|}\right\}^r\right]^p dx=A_r^{*p}<\infty,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[g^*(y)\left\{\log'\frac{1}{|y|}\right\}^s\right]^q dy=B_s^{*q}<\infty,$$

* Эта постановка вопроса была предложена проф. С. Л. Соболевым.

то

$$J_\mu = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{\log' \frac{1}{|x+y|}\right\}^\mu}{|x+y|^\lambda} f(x)\, g(y)\, dx\, dy \leqslant K A_r^* B_s^*,$$

где K зависит только от p, q, r и s.

Условия сходимости интеграла J_μ содержат, таким образом, одну степень свободы, выражающуюся в произвольном выборе одного из параметров r и s. Слишком сильное возрастание одной из функций f^* и g^* в окрестности начала координат может быть, до известной степени, компенсировано слабостью возрастания другой.

В частности, из теоремы 2 следует

ТЕОРЕМА 2а. *Для любого вещественного k*

$$J = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\, g(y)}{|x+y|^\lambda}\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant K \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[f^*(x) \left\{ \log' \frac{1}{|x|} \right\}^k \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[g^*(y) \left\{ \log' \frac{1}{|y|} \right\}^{-k} \right]^q dy \right\}^{\frac{1}{q}},$$

с p, q и λ, определенными выше, где K зависит только от p, q и k.

Теорема 2а дает более гибкую оценку интеграла J, чем неравенство (1).

Метод оценки интеграла J, примененный в доказательстве теоремы 1, соответственно обобщенный для интеграла J_μ, ведет к теореме 2 только для $r \geqslant 0$ и $s \geqslant 0$. Для того чтобы доказать теорему 2 полностью, можно воспользоваться методом доказательства неравенства (1), примененным Hardy, Littlewood'ом и Pólya в их книге о неравенствах (¹). Для этого мы должны сначала обобщить одно неравенство Hardy (⁶).

§ 4. Обобщение неравенства Hardy

Пусть $q > 1$, a и b — любые вещественные числа, $\varphi(y)$ — неотрицательная измеримая функция и

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(y) \left\{ \log' \frac{1}{y} \right\}^{a+b} dy.$$

Тогда

$$I = \int_0^\infty \left[\frac{\Phi(x)}{x} \right]^q \left\{ \log' \frac{1}{x} \right\}^{-qa} dx \leqslant C \int_0^\infty \varphi^q(x) \left\{ \log' \frac{1}{x} \right\}^{qb} dx, \qquad (10)$$

где C зависит только от q, a и b.

Неравенство Hardy является частным случаем $a = b = 0$ неравенства (10).

В следующем ниже доказательстве неравенства (10) C означают положительные конечные числа, вообще не равные между собой, зависящие только от параметров q, a и b проблемы.

Пусть $0 < x_1 < \exp(-1 - 2|a|\, q')$. Заметим прежде всего, что, по неравенству Hölder'a,

$$\Phi(x_1) = \int_0^{x_1} \varphi(y) \left\{ \log \frac{1}{y} \right\}^b \cdot \left\{ \log \frac{1}{y} \right\}^a dy \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_0^{x_1} \varphi^q(y) \left\{ \log \frac{1}{y} \right\}^{qb} dy \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \int_0^{x_1} \left\{ \log \frac{1}{y} \right\}^{q'a} dy \right\}^{\frac{1}{q'}} \leqslant$$

$$\leqslant C x_1^{\frac{1}{q'}} \left\{ \log \frac{1}{x_1} \right\}^a \eta^{\frac{1}{q}}(x_1)\, *, \tag{11}$$

где

$$\eta(x_1) = \int_0^{x_1} \varphi^q(y) \left\{ \log \frac{1}{y} \right\}^{qb} dy \to 0$$

при $x_1 \to 0$ в силу сходимости интеграла правой части неравенства (10) **.

Для оценки интеграла I рассмотрим $(x_2 > x_1)$

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\Phi(x)}{x} \right]^q \left\{ \log' \frac{1}{x} \right\}^{-qa} dx = \left[-\Phi^q(x) \int_x^\infty t^{-q} \left\{ \log' \frac{1}{t} \right\}^{-qa} dt \right]_{x=x_1}^{x=x_2} +$$

$$+ q \int_{x_1}^{x_2} \Phi^{q-1}(x) \varphi(x) \left\{ \log' \frac{1}{x} \right\}^{a+b} \int_x^\infty t^{-q} \left\{ \log' \frac{1}{t} \right\}^{-qa} dt\, dx \leqslant$$

$$\leqslant q \int_{x_1}^{x_2} \Phi^{q-1}(x) \varphi(x) \left\{ \log' \frac{1}{x} \right\}^{a+b} \int_x^\infty t^{-q} \left\{ \log' \frac{1}{t} \right\}^{-qa} dt\, dx + R, \tag{12}$$

где

$$R = \Phi^q(x_1) \int_{x_1}^\infty t^{-q} \left\{ \log' \frac{1}{t} \right\}^{-qa} dt \leqslant$$

$$\leqslant C \eta(x_1) x_1^{q-1} \left\{ \log \frac{1}{x_1} \right\}^{qa} \int_{x_1}^\infty t^{-q} \left\{ \log' \frac{1}{t} \right\}^{-qa} dt, \tag{13}$$

по (11).

Мы должны теперь оценить

$$I_1(x) = \int_x^\infty t^{-q} \left\{ \log' \frac{1}{t} \right\}^{-qa} dt.$$

---

* Так как для $0 < x_1 < \exp(-1 - 2|a|\, q')$

$$\frac{d}{dx_1} \left[\int_0^{x_1} \left\{ \log \frac{1}{y} \right\}^{q'a} dy \right] \leqslant C \frac{d}{dx_1} \left[x_1 \left\{ \log \frac{1}{x_1} \right\}^{q'a} \right],$$

$$\int_0^{x_1} \left\{ \log \frac{1}{y} \right\}^{q'a} dy \leqslant C x_1 \left\{ \log \frac{1}{x_1} \right\}^{q'a}.$$

** Если этот интеграл расходится, то неравенство (10) тривиально.

Если $a \leqslant 0$, то очевидно

$$I_1(x) \leqslant \left\{\log' \frac{1}{x}\right\}^{-qa} \int_x^\infty t^{-q}\,dt = Cx^{1-q}\left\{\log' \frac{1}{x}\right\}^{-qa}.$$

Если же $a > 0$, то поступим следующим образом. Для $x \geqslant \frac{1}{e}$ имеем

$$I_1(x) = Cx^{1-q} = Cx^{1-q}\left\{\log' \frac{1}{x}\right\}^{-qa}$$

Для $0 < x < e^{-1}$ положим $\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{2},\ 1 - \left(\log\frac{1}{x}\right)^{-1}\right\}$, так что $1 - \varepsilon \geqslant \frac{1}{2}$ и $x^{1-\varepsilon} \leqslant e^{-1}$. Тогда, для $0 < x < e^{-1}$,

$$I_1(x) = \int_x^{x^{1-\varepsilon}} t^{-q}\left\{\log\frac{1}{t}\right\}^{-qa} dt + \int_{x^{1-\varepsilon}}^{\frac{1}{e}} t^{-q}\left\{\log\frac{1}{t}\right\}^{-qa} dt + C \leqslant$$

$$\leqslant C\left\{\log\frac{1}{x^{1-\varepsilon}}\right\}^{-qa}\left[x^{1-q} - x^{(1-q)(1-\varepsilon)}\right] + Cx^{(1-q)(1-\varepsilon)} + C \leqslant$$

$$\leqslant Cx^{1-q}\left\{\log\frac{1}{x}\right\}^{-qa}\left[C + Cx^{\varepsilon(q-1)}\left\{\log\frac{1}{x}\right\}^{qa}\right] \leqslant Cx^{1-q}\left\{\log\frac{1}{x}\right\}^{-qa} =$$

$$= Cx^{1-q}\left\{\log'\frac{1}{x}\right\}^{-qa}.$$

Таким образом мы имеем

$$I_1(x) = \int_x^\infty t^{-q}\left\{\log'\frac{1}{t}\right\}^{-qa} dt \leqslant Cx^{1-q}\left\{\log'\frac{1}{x}\right\}^{-qa} \quad (0 < x < \infty). \qquad (14)$$

Из (13) и (14) следует $R \leqslant C\eta(x_1) \to 0$ при $x_1 \to 0$. Следовательно, переходя в (12) к пределам $x_1 = 0$ и $x_2 = \infty$, мы получим

$$I \leqslant q \int_0^\infty \Phi^{q-1}(x)\varphi(x)\left\{\log'\frac{1}{x}\right\}^{a+b} \int_x^\infty t^{-q}\left\{\log'\frac{1}{t}\right\}^{-qa} dt\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C\int_0^\infty \left[\frac{\Phi(x)}{x}\right]^{q-1}\left\{\log'\frac{1}{x}\right\}^{-(q-1)a} \cdot \varphi(x)\left\{\log'\frac{1}{x}\right\}^{b} dx,$$

опять по (14). Применяя неравенство Hölder'a к последнему интегралу, находим

$$I \leqslant CI^{\frac{1}{q'}}\left\{\int_0^\infty \varphi^q(x)\left\{\log'\frac{1}{x}\right\}^{qb} dx\right\}^{\frac{1}{q}},$$

или

$$I \leqslant C\int_0^\infty \varphi^q(x)\left\{\log'\frac{1}{x}\right\}^{qb} dx,$$

т. е. неравенство (10).

§ 5. Доказательство теоремы 2

Во всем дальнейшем K означают положительные конечные числа, зависящие только от p, q, r и s, вообще не равные между собой.

По лемме Riesz'a, $J_\mu \leqslant J_\mu^*$, где J_μ^* образуется из J_μ заменой f и g на равноизмеримые с ними симметрично убывающие функции f^* и g^* (заметим, что ядро $|t|^{-\lambda}\left\{\log'\frac{1}{|t|}\right\}^\mu$ является само симметрично убывающей функцией).

Разбивая J_μ^* на четыре интеграла, распространенные соответственно по четырем квадрантам, мы видим, что интеграл по первому квадранту ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$) равен интегралу по третьему ($x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$) и интеграл по второму ($x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$) — интегралу по четвертому ($x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$), причем общее значение первых двух интегралов не превосходит общего значения последних двух.

Таким образом

$$J_\mu^* \leqslant 4 \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{\left\{\log'\frac{1}{|x-y|}\right\}^\mu}{|x-y|^\lambda} f^*(x)\, g^*(y)\, dx\, dy = 4J_\mu^{*'} + 4J_\mu^{*''}, \tag{15}$$

где

$$J_\mu^{*'} = \int\limits_{x=0}^\infty \int\limits_{y=0}^x \frac{\left\{\log'\frac{1}{x-y}\right\}^\mu}{(x-y)^\lambda} f^*(x)\, g^*(y)\, dx\, dy,$$

$$J_\mu^{*''} = \int\limits_{y=0}^\infty \int\limits_{x=0}^y \frac{\left\{\log'\frac{1}{y-x}\right\}^\mu}{(y-x)^\lambda} f^*(x)\, g^*(y)\, dx\, dy.$$

Займемся оценкой интеграла $J_\mu^{*'}$. Очевидно

$$J_\mu^{*'} = \int\limits_{x=0}^\infty f^*(x)\, dx \int\limits_{y=0}^x \frac{\left\{\log'\frac{1}{x-y}\right\}^\mu}{(x-y)^\lambda} \left\{\log'\frac{1}{y}\right\}^{-\mu} \cdot g^*(y) \left\{\log'\frac{1}{y}\right\}^\mu dy. \tag{16}$$

Так как, в интервале $(0, x)$, $(x-y)^{-\lambda}\left\{\log'\frac{1}{x-y}\right\}^\mu \left\{\log'\frac{1}{y}\right\}^{-\mu}$ является возрастающей функцией от y, а $g^*(y)\left\{\log'\frac{1}{y}\right\}^\mu$ — функцией убывающей, то, по неравенству Чебышева *,

---

* Неравенство Чебышева имеет следующий вид: если $a(y) \geqslant 0$, $b(y) \geqslant 0$ и $a(y)$ возрастает, а $b(y)$ убывает в $(0, x)$, то

$$\int\limits_0^x a(y)\, b(y)\, dy \leqslant \frac{1}{x} \int\limits_0^x a(y)\, dy \int\limits_0^x b(y)\, dy.$$

Следующее простое доказательство этого неравенства является, насколько мне известно, новым. Мы можем, очевидно, предположить, что $x = 1$,

$$\int\limits_0^1 a(y)\, dy = \int\limits_0^1 b(y)\, dy = 1,$$

(см. след. стр.)

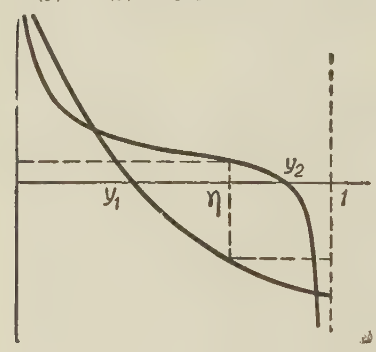
$$\int_0^x \frac{\left\{\log'\frac{1}{x-y}\right\}^\mu}{(x-y)^\lambda}\left\{\log'\frac{1}{y}\right\}^{-\mu}\cdot g^*(y)\left\{\log'\frac{1}{y}\right\}^\mu dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\left\{\log'\frac{1}{x-y}\right\}^\mu}{(x-y)^\lambda}\left\{\log'\frac{1}{y}\right\}^{-\mu} dy \int_0^x g^*(y)\left\{\log'\frac{1}{y}\right\}^\mu dy. \qquad (17)$$

С другой стороны, имеем

$$\int_0^x \frac{\left\{\log'\frac{1}{x-y}\right\}^\mu}{(x-y)^\lambda}\left\{\log'\frac{1}{y}\right\}^{-\mu} dy \leqslant \left\{\log'\frac{1}{x}\right\}^{-\mu}\int_0^x \frac{\left\{\log'\frac{1}{y}\right\}^\mu}{y^\lambda} dy \leqslant Kx^{1-\lambda}\,*,$$

и $a(y)$ и $b(y)$ непрерывны для $0<y<1$. Положим $a(y)=1-\alpha(y)$, $b(y)=1+\beta(y)$, так что $\alpha(y)$ и $\beta(y)$ суть убывающие функции и



$$\int_0^1 \alpha(y)\,dy = \int_0^1 \beta(y)\,dy = 0.$$

Так как

$$\int_0^1 a(y)\,b(y)\,dy = 1-\int_0^1 \alpha(y)\,\beta(y)\,dy,$$

то, очевидно, достаточно показать, что

$$\int_0^1 \alpha(y)\,\beta(y)\,dy \geqslant 0.$$

Пусть $\alpha(y)\not\equiv 0$, $\beta(y)\not\equiv 0$, $\alpha(y_1)=\beta(y_2)=0$, $0<y_1<y_2<1$, $\alpha(y)>0$ для $0<y<y_1$, $\beta(y)<0$ для $y_2<y<1$ (см. фигуру). Неравенство $\alpha(y)\beta(y)<0$ может иметь место только для точек интервала $y_1<y<y_2$. Пусть $\max\limits_{y_1<y<y_2}|\alpha(y)\beta(y)|=|\alpha(\eta)|\beta(\eta)$ достигается в некоторой точке η, $y_1<\eta<y_2$. Тогда

$$\int_{y_1}^{y_2} \alpha(y)\,\beta(y)\,dy \geqslant -|\alpha(\eta)|\,\beta(\eta)\,(y_2-y_1),$$

и

$$\int_0^{y_1} \alpha(y)\,\beta(y)\,dy \geqslant \beta(\eta)\int_0^{y_1}\alpha(y)\,dy \geqslant \beta(\eta)\,|\alpha(\eta)|\,(1-\eta),$$

$$\int_{y_2}^1 \alpha(y)\,\beta(y)\,dy \geqslant |\alpha(\eta)|\int_{y_2}^1 \beta(y)\,dy \geqslant |\alpha(\eta)|\,\beta(\eta)\,\eta,$$

так что

$$\int_0^1 \alpha(y)\,\beta(y)\,dy \geqslant |\alpha(\eta)|\,\beta(\eta)\left\{1-(y_2-y_1)\right\}>0,$$

что и требовалось доказать.

* Так как для $0<x<\exp\left\{-1-\frac{2\mu}{1-\lambda}\right\}$

$$\frac{d}{dx}\left[\int_0^x y^{-\lambda}\left\{\log'\frac{1}{y}\right\}^\mu dy\right] \leqslant K\frac{d}{dx}\left[x^{1-\lambda}\left\{\log'\frac{1}{x}\right\}^\mu\right],$$

откуда, по (17) и (16),

$$J_\mu^{*'} \leqslant K \int_0^\infty x^{-\lambda} f^*(x)\, g_1^*(x)\, dx, \tag{18}$$

где

$$g_1^*(x) = \int_0^x g^*(y) \left\{ \log' \frac{1}{y} \right\}^\mu dy. \tag{19}$$

Применяя к (18) неравенство Hölder'a, находим

$$J_\mu^{*'} \leqslant K \left\{ \int_0^\infty \left[f^*(x) \left\{ \log' \frac{1}{x} \right\}^r \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^\infty x^{-\lambda p'} \left\{ \log' \frac{1}{x} \right\}^{-rp'} g_1^{*p'}(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant K A_r^* \left\{ \int_0^\infty x^{-\lambda p'} \left\{ \log' \frac{1}{x} \right\}^{-rp'} g_1^{*p'}(x)\, dx \right\}^{\frac{1}{p'}}. \tag{20}$$

Но, по (19), применяя опять неравенство Hölder'a,

$$g_1^*(x) = \int_0^x g^*(y) \left\{ \log' \frac{1}{y} \right\}^s \cdot \left\{ \log' \frac{1}{y} \right\}^r dy \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_0^x \left[g^*(y) \left\{ \log' \frac{1}{y} \right\}^s \right]^q dy \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \int_0^x \left\{ \log' \frac{1}{y} \right\}^{rq'} dy \right\}^{\frac{1}{q'}} \leqslant$$

$$\leqslant K B_s^* x^{\frac{1}{q'}} \left\{ \log' \frac{1}{x} \right\}^r {}^*,$$

и следовательно,

$$g_1^{*p'}(x) \leqslant K B_s^{*p'-q} x^{\frac{p'-q}{q'}} \left\{ \log' \frac{1}{x} \right\}^{r(p'-q)} g_1^{*q}(x).$$

Подставляя эту оценку в (20), находим

$$J_\mu^{*'} \leqslant K A_r^* B_s^{*\frac{p'-q}{p'}} \left\{ \int_0^\infty \left[\frac{g_1^*(x)}{x} \right]^q \left\{ \log' \frac{1}{x} \right\}^{-rq} dx \right\}^{\frac{1}{p'}}, \tag{21}$$

так как $-\lambda p' + \frac{p'-q}{q'} = -1 - \frac{p'}{q'} + \frac{p'}{q'} - \frac{q}{q'} = -q$ и $r(p'-q) - rp' = -rq$.

то
$$\int_0^x y^{-\lambda} \left\{ \log' \frac{1}{y} \right\}^\mu dy \leqslant K x^{1-\lambda} \left\{ \log' \frac{1}{x} \right\}^\mu$$

для этих x, и, следовательно, для всех $x > 0$.

* По оценке, аналогично произведенной в последнем неравенстве (11). То, что здесь x не ограничено сверху, очевидно, не нарушает справедливости оценки.

Интеграл правой части (21) оценим с помощью неравенства (10), для чего положим $a=r$, $b=s$ (так что $a+b=\mu$), $\varphi(y)=g^*(y)$, $\Phi(x)=$ $=g_1^*(x)$, и получим

$$J_\mu^{*\prime} \leqslant K A_r^* B_s^{*\frac{p'-q}{p'}} \left\{ \int_0^\infty \left[g^*(x) \left\{ \log' \frac{1}{x} \right\}^s \right]^q dx \right\}^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant K A_r^* B_s^{*\frac{p'-q}{p'}} B_s^{*\frac{q}{p'}} = K A_r^* B_s^* .$$

Совершенно аналогично доказываем, что и

$$J_\mu^{*\prime\prime} \leqslant K A_r^* B_s^* ,$$

откуда, в силу (15), следует теорема 2.

§ 6. Обобщения неравенства Hilbert'a-Riesz'a (продолжение)

Недостаток теорем 2 и 2а заключается в том, что в предположения относительно f и g входят функции f^* и g^*. От этого недостатка можно освободиться; именно, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$, $\lambda=2-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$ *и* r *и* s — *произвольные вещественные числа, подчиненные только условию* $r+s=\mu\geqslant 0$. *Если* $f(x)$ *и* $g(y)$ *неотрицательные измеримые функции, такие, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x)\{\log' f(x)\}^r]^p dx = A_r^p < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [g(y)\{\log' g(y)\}^s]^q dy = B_s^q < \infty,$$

то

$$J_\mu = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\{\log' \frac{1}{|x+y|}\right\}^\mu}{|x+y|^\lambda} f(x)\, g(y)\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant K \{\log' A_r^{-r}\}^{|r|} \{\log' B_s^{-s}\}^{|s|} A_r B_s,$$

где K *зависит только от* p, q, r *и* s.

Таким образом, например для $r>0$, часть правой стороны неравенства теоремы 3, зависящая от A_r, будет для малых A_r порядка $A_r\left\{\log\frac{1}{A_r}\right\}^r$, а для больших A_r — порядка A_r, и т. д.

В частности, из теоремы 3 следует

ТЕОРЕМА 3а. *Для любого вещественного* k

$$J = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\, g(y)}{|x+y|^\lambda} dx\, dy \leqslant K \{\log' F_k^{-k}\}^{|k|} \{\log' G_k^{k}\}^{|k|} F_k G_k ,$$

где

$$F_k^p = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)\{\log' f(x)\}^k]^p\, dx,$$

$$G_k^q = \int_{-\infty}^{\infty} [g(y)\{\log' g(y)\}^{-k}]^q\, dy,$$

p, q и λ определены выше и K зависит только от p, q и k.

Теорема 3а, как и теорема 2а, являются непосредственными обобщениями неравенства Hilbert'a-Riesz'a (1), не затрагивающими его левой части.

Заметим, что в предпосылках теорем 3 и 3а рост функций f и g, необходимый для сходимости интегралов J_μ и J, регулируется безотносительно каких-либо специальных функций от независимых переменных.

§ 7. Вывод теоремы 3 из теоремы 2

Наша задача заключается, очевидно, в оценке A_r^* и B_s^* через A_r и B_s. Итак, предположим, например, что

$$A_r^p = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x)\{\log' f(x)\}^r]^p\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} [f^*(x)\{\log' f^*(x)\}^r]^p\, dx < \infty \text{ *}.$$

Рассмотрим сначала тот случай, когда $r \geqslant 0$.

Обозначим через E_1 множество значений x, для которых $f^{*p}(x) > A_r^p |x|^{-\frac{1}{2}}$, и через E_2 — множество значений x, для которых $f^{*p}(x) \leqslant A_r^p |x|^{-\frac{1}{2}}$. Очевидно, что любое вещественное x принадлежит или к E_1 или к E_2. Далее, пусть E_2' будет та часть E_2, которая лежит в интервале $|x| \leqslant e^{-1}$ и пусть $E_2 - E_2' = E_2''$.

На E_1, $\frac{1}{|x|} < A_r^{-2p} f^{*2p}(x)$, т. е.

$$\left\{\log' \frac{1}{|x|}\right\}^r \leqslant K \{\log' A_r^{-r}\}^r \{\log' f^*(x)\}^r,$$

откуда

$$\int_{E_1} \left[f^*(x)\left\{\log' \frac{1}{|x|}\right\}^r\right]^p dx \leqslant K\left\{\log' A_r^{-r}\right\}^{rp} A_r^p. \tag{22}$$

Дальше, в силу определения множества E_2',

$$\int_{E_2'} \left[f^*(x)\left\{\log' \frac{1}{|x|}\right\}^r\right]^p dx \leqslant A_r^p \int_{-\frac{1}{e}}^{\frac{1}{e}} |x|^{-\frac{1}{2}} \left\{\log \frac{1}{|x|}\right\}^{rp} dx \leqslant K A_r^p, \tag{23}$$

* Последнее равенство имеет место в силу свойств равноизмеримых функций.

и наконец

$$\int\limits_{E_2''}\left[f^*(x)\left\{\log'\frac{1}{|x|}\right\}^r\right]^p dx=\int\limits_{E_2''} f^{*p}(x)\,dx\leqslant A_r^p. \qquad (24)$$

Складывая неравенства (22), (23) и (24), находим

$$A_r^{*p}\leqslant K\left\{\log' A_r^{-r}\right\}^{rp}A_r^p+KA_r^p+A_r^p\leqslant K\left\{\log' A_r^{-r}\right\}^{rp}A_r^p,$$

$$A_r^*\leqslant K\left\{\log' A_r^{-r}\right\}^r A_r \quad (r\geqslant 0). \qquad (25)$$

Рассмотрим теперь случай $r<0$.

Если $f^*(x)\leqslant e$ для всех x, то, очевидно,

$$A_r^{*p}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[f^*(x)\left\{\log'\frac{1}{|x|}\right\}^r\right]^p dx\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{*p}(x)\,dx=A_r^p. \qquad (26)$$

Если же существует такое $\xi>0$, что $f^*(x)>e$ для $0<x<\xi$ и $f^*(x)<e$ для $x>\xi$, то, для $0<x<\xi$,

$$A_r^p\geqslant\int\limits_{-x}^{x}\left[f^*(t)\left\{\log f^*(t)\right\}^r\right]^p dt=2\int\limits_0^x f^*(t)\left[f^{*p-1}\left\{\log f^*(t)\right\}^{rp}\right]dt\geqslant$$

$$\geqslant K\int\limits_0^x f^*(t)\,dt\geqslant Kxf^*(x).^*,$$

откуда $f^*(x)\leqslant K\frac{A_r^p}{x}$. Таким образом мы имеем для $0<|x|<\xi$

$$\left\{\log f^*(x)\right\}^{-r}\leqslant K\left\{\log' A_r^{-r}\right\}^{-r}\left\{\log'\frac{1}{|x|}\right\}^{-r},$$

или

$$\left\{\log'\frac{1}{|x|}\right\}^r\leqslant K\left\{\log' A_r^{-r}\right\}^{-r}\left\{\log^* f(x)\right\}^r.$$

Следовательно,

$$A_r^{*p}=\int\limits_{|x|\leqslant\xi}\left[f^*(x)\left\{\log'\frac{1}{|x|}\right\}^r\right]^p dx+\int\limits_{|x|\geqslant\xi}\left[f^*(x)\left\{\log'\frac{1}{|x|}\right\}^r\right]^p dx\leqslant$$

$$\leqslant K\left\{\log' A_r^{-r}\right\}^{-rp}\left[\int\limits_{|x|\leqslant\xi}\left[f^*(x)\left\{\log f^*(x)\right\}^r\right]^p dx+\int\limits_{|x|\geqslant\xi} f^{*p}(x)\,dx\right]=$$

$$=K\left\{\log' A_r^{-r}\right\}^{-rp}A_r^p. \qquad (27)$$

Из (26) и (27) заключаем, что

$$A_r^*\leqslant K\left\{\log' A_r^{-r}\right\}^{-r}A_r \quad (r<0), \qquad (28)$$

---

* При предпоследней оценке мы применили тот факт, что для $p>1$ и $r<0$

$$\min_{u\geqslant e} u^{p-1}\left\{\log u\right\}^r=\begin{cases} e^{p-1}, & \text{если } p-1\geqslant -r,\\ e^{-r}\left(\dfrac{p-1}{|r|}\right)^{-r}, & \text{если } p-1\leqslant -r.\end{cases}$$

и из (25) и (28) следует, что для любого r

$$A_r^* \leqslant K \left\{ \log' A_r^{-r} \right\}^{|r|} A_r. \qquad (29)$$

Совершенно аналогично доказываем, что

$$B_s^* \leqslant K \left\{ \log' B_s^{-s} \right\}^{|s|} B_s. \qquad (30)$$

Теорема 3 следует теперь из теоремы 2, (29) и (30).

§ 8. Точность оценок

В связи с теоремами 2 и 3 возникает вопрос, является ли μ наивысшей степенью логарифма в ядре оцениваемого двойного интеграла J_μ, для которой этот интеграл еще сходится при данных условиях.

Ответ на этот вопрос должен быть положительный. В самом деле, пусть

$$f(x) = \begin{cases} \varepsilon^{-\frac{1}{p}} \left\{ \log \frac{1}{|x|} \right\}^{-r} & \text{для } |x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0 & \text{для } |x| > \frac{\varepsilon}{2}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} \varepsilon^{-\frac{1}{q}} \left\{ \log \frac{1}{|y|} \right\}^{-s} & \text{для } |y| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \\ 0 & \text{для } |y| > \frac{\varepsilon}{2}, \end{cases}$$

где $0 < \varepsilon \leqslant e^{-p}$ дано. Если $r \geqslant 0$, то $f(x) < \varepsilon^{-\frac{1}{p}}$ и

$$\left\{ \log' f(x) \right\}^r \leqslant K \left\{ \log \frac{1}{\varepsilon} \right\}^r \quad \left(|x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Если же $r < 0$, то

$$\left\{ \log' f(x) \right\}^r = \left\{ \log f(x) \right\}^r = \left[K \log \frac{1}{\varepsilon} + \log \left\{ \log \frac{1}{|x|} \right\}^{-r} \right]^r \leqslant$$
$$\leqslant \left[K \log \frac{1}{\varepsilon} + K \right]^r \leqslant K \left\{ \log \frac{1}{\varepsilon} \right\}^r \quad \left(|x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Таким образом для всех r и $|x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$

$$\left\{ \log' f(x) \right\}^r \leqslant K \left\{ \log \frac{1}{\varepsilon} \right\}^r,$$

и следовательно,

$$A_r^p = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \left[f(x) \left\{ \log' f(x) \right\}^r \right]^p dx \leqslant K \varepsilon^{-1} \left\{ \log \frac{1}{\varepsilon} \right\}^{rp} \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \left\{ \log \frac{1}{|x|} \right\}^{-rp} dx \leqslant K.$$

Аналогично $B_s \leqslant K$, так что A_r и B_s конечны для специальных f и g, определенных выше.

Рассмотрим теперь интеграл $J_{\mu'}$, где $\mu' > \mu$, образованный с этими f и g,

$$J_{\mu'} = \int\limits_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \int\limits_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\left\{\log \frac{1}{|x+y|}\right\}^{\mu'}}{|x+y|^{\lambda}} \varepsilon^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left\{\log \frac{1}{|x|}\right\}^{-r} \left\{\log \frac{1}{|y|}\right\}^{-s} dx\, dy.$$

Имеем

$$J_{\mu'} > \varepsilon^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \int\limits_{x=0}^{\frac{\varepsilon}{2}} x^{1-\lambda} \left\{\log \frac{1}{x}\right\}^{-r} dx \int\limits_{y=0}^{x} \frac{\left\{\log \frac{1}{x} + \log \frac{1}{1-\frac{y}{x}}\right\}^{\mu}}{\left(1-\frac{y}{x}\right)^{\lambda}} \times$$

$$\times \left\{\log \frac{1}{y}\right\}^{-s} \frac{dy}{x} \geqslant \varepsilon^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \int\limits_{x=0}^{\frac{\varepsilon}{2}} x^{1-\lambda} \left\{\log \frac{1}{x}\right\}^{-r+\mu'} dx \int\limits_{y=0}^{x} \frac{\left\{\log \frac{1}{y}\right\}^{-s}}{\left(1-\frac{y}{x}\right)^{\lambda}} \frac{dy}{x} \geqslant$$

$$\geqslant K\varepsilon^{-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \int\limits_{x=0}^{\frac{\varepsilon}{2}} x^{1-\lambda} \left\{\log \frac{1}{x}\right\}^{\mu'-\mu} dx \geqslant K \left\{\log \frac{1}{\varepsilon}\right\}^{\mu'-\mu}.$$

Но для данного сколь угодно малого $\mu' - \mu$ последнее выражение может быть сколь угодно большим для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Следовательно, для любого $\mu' > \mu$ $J_{\mu'}$ может быть сколь угодно большим при ограниченных A_r и B_s, т. е. степень μ логарифма в ядре интеграла J_μ является наивысшей степенью, для которой J_μ еще сходится в условиях теоремы 3. В силу соотношений (29) и (30) то же остается справедливым и в условиях теоремы 2.

Москва.

Поступило
20. VII. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hardy G. H., Littlewood J. E. and Pólya G., Inequalities (Cambridge 1934), теорема 382, стр. 288.

[2] Там же, теорема 340, стр. 254.

[3] Levin V., Two remarks on Hilbert's double series theorem, Journal Indian Math. Soc., new series, vol. II (1936), 111—115.

[4] Riesz F., Sur une inégalité intégrale, Journal London Math. Soc., 5 (1930), 162—168.

[5] Levin V., On the two-parameter extension and analogue of Hilbert's inequality, Journal London Math. Soc., 11 (1936), 119—124.

[6] Hardy G. H., Note on a theorem of Hilbert, Math. Zeitschr., 6 (1920), 314—317.

V. LEVIN. NOTES ON INEQUALITIES. IV. ON THE HILBERT-RIESZ INEQUALITY

SUMMARY

By the Hilbert-Riesz inequality is meant the following inequality. Let $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$, $\lambda=2-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}$ $(0<\lambda<1)$, $f(x)\geqslant 0$, $g(y)\geqslant 0$,

$$0<\int_{-\infty}^{\infty} f^p(x)\,dx=F^p<\infty,\quad 0<\int_{-\infty}^{\infty} g^q(y)\,dy=G^q<\infty.$$

Then

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,g(y)}{|x+y|^{\lambda}}\,dx\,dy\leqslant K(p,\,q)\,FG, \tag{1}$$

where $K(p,\,q)$ depends only on p and q.

It is a generalisation of Hilbert's inequality due to G. H. Hardy and J. E. Littlewood and its proof is based upon a deep lemma of F. Riesz.

The author proves first the following inequality, which is slightly stronger than (1) and involves a best possible constant.

THEOREM 1. *Let*

$$\alpha^p=\sup_{-\infty<x<\infty}|x|\,f^{*p}(x),\quad \beta^q=\sup_{-\infty<y<\infty}|y|\,g^{*q}(y),$$

where f^* and g^* are rearrangements of f and g in symmetrical decreasing order, $\rho=\frac{q'-p}{q'+p'}$ $(0<\rho<1)$, $\sigma=\frac{p'-q}{p'+q'}$ $(0<\sigma<1)$. *Then*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)\,g(y)}{|x+y|^{\lambda}}\,dx\,dy<L(p,\,q)\,\alpha^{\rho}\beta^{\sigma}F^{1-\rho}G^{1-\sigma},$$

where

$$L(p,\,q)=\frac{4}{\pi}\sin\frac{\lambda\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2p}\sin\frac{\pi}{2q}\Gamma(1-\lambda)\,\Gamma\left(\frac{1}{p'}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q'}\right)$$

is the best possible constant *.

Since $\alpha^p\leqslant\frac{1}{2}F^p$, $\beta^q\leqslant\frac{1}{2}G^q$, the inequality asserted in Theorem 1 is indeed slightly stronger than (1).

The problem of determining the best possible $K(p,\,q)$ in (1) is however not solved by Theorem 1.

Introducing the denotation

$$\log' t=\max(1,\,\log t)\quad (t>0),$$

the author then proves

* This opportunity is used to correct the best value of $L(p,\,q)$ in author's paper «On the two-parameter extension and analogue of Hilbert's inequality», Journal L. M. S., 11 (1936), p. 124, where Theorem 1 is stated without proof in a slightly different form.

THEOREM 2. *Let* $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$, $\lambda=2-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$; *let* r *and* s *be two arbitrary real numbers subjected to the only condition* $r+s=$ $=\mu\geqslant 0$ *and let* $f(x)\geqslant 0$, $g(y)\geqslant 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[f^*(x)\left\{\log'\frac{1}{|x|}\right\}^r\right]^p dx=A_r^{*p}<\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[g^*(y)\left\{\log'\frac{1}{|y|}\right\}^s\right]^q dy=B_s^{*q}<\infty.$$

Then

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left\{\log'\frac{1}{|x+y|}\right\}^{\mu}}{|x+y|^{\lambda}}f(x)\,g(y)\,dx\,dy\leqslant KA_r^*B_s^*,$$

where K *depends only on* p, q, r *and* s.

Theorem 2a is the special case $r=k$, $s=-k$, $\mu=0$ of Theorem 2 stated explicitly.

Finally the author deduces from Theorem 2 the following

THEOREM 3. *Let* $p>1$, $q>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1$, $\lambda=2-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}$; *let* r *and* s *be two arbitrary real numbers subjected to the only condition* $r+s=$ $=\mu\geqslant 0$ *and let* $f(x)\geqslant 0$, $g(y)\geqslant 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)\{\log' f(x)\}^r]^p dx=A_r^p<\infty,\quad \int_{-\infty}^{\infty}[g(y)\{\log' g(y)\}^s]^q dy=B_s^q<\infty.$$

Then

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left\{\log'\frac{1}{|x+y|}\right\}^{\mu}}{|x+y|^{\lambda}}f(x)\,g(y)\,dx\,dy\leqslant$$

$$\leqslant K\left\{\log' A_r^{-r}\right\}^{|r|}\left\{\log' B_s^{-s}\right\}^{|s|}A_rB_s,$$

where K *depends only on* p, q, r *and* s.

Theorem 3a is the special case $r=k$, $s=-k$, $\mu=0$ of Theorem 3.

In conclusion it is shown that both in Theorem 2 and Theorem 3 μ is the highest power of the logarithm in the kernel of the estimated double integral, for which this integral is finite under the assumptions of the corresponding theorems.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

П. Е. ДЮБЮК

О ПОРЯДКЕ ЭЛЕМЕНТА В ПРОСТОЙ ГРУППЕ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе выводятся некоторые новые критерии непростоты конечной группы. В частности дается обобщение теоремы Бернсайда о непростоте группы.

В работе «Квазинормализаторы и мономиальные представления» (1) В. К. Туркин * доказывает следующую теорему:

«Пусть $\mathfrak{G}$ есть группа порядка $p^\alpha n$ (p — нечетное простое число, $p(p-1)$ взаимно просто с n). Пусть A есть элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$. Если порядок нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$ относительно группы $\mathfrak{G}$ не делится на p^{2k}, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель, порядок которого делится на n».

Как следует из доказательства приведенной теоремы, требование взаимной простоты $p-1$ и n может быть снято и заменено другим более слабым. Таким образом самая теорема может быть сформулирована также следующим образом:

Пусть $\mathfrak{G}$ есть группа порядка $p^\alpha n$ (p — нечетное простое число, n не делится на p). Пусть A есть элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$. Если нормализатор циклической группы $\left\{A^{p^{k-1}}\right\}$ совпадает с нормализатором элемента $A^{p^{k-1}}$ и порядок этого нормализатора не делится на p^{2k}, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель, порядок которого делится на n.

Далее оказывается возможным провести исследование также и для случая $p=2$. Для этого достаточно сделать некоторые дополнительные замечания к доказательству приведенной выше теоремы В. К. Туркина. В процессе этого доказательства В. К. Туркин использует две специально выведенных леммы, причем нечетность простого числа p играет роль только при выводе этих лемм и несущественна в дальнейшем при доказательстве непосредственно самой теоремы. Приводим формулировку этих лемм:

* Автор пользуется случаем, чтобы принести благодарность проф. В. К. Туркину за предоставление возможности ознакомиться с этой его работой в рукописи.

«ЛЕММА I. Пусть v есть отношение порядков групп $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}$ и $\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}}$. Тогда

$$\Pi\,(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}},\ A)=[\Pi\,(\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^i}},\ A)]^v.$$

Примечание. Если $\lambda_i=k-i$, то полагаем, что

$$\mathfrak{N}^{(\lambda_i)}_{A^{p^{i+1}}}=\mathfrak{N}^{(k-i-1)}_{A^{p^{i+1}}}.$$

«ЛЕММА II. Если $\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}}\neq\mathfrak{N}^{(\lambda-1)}_{A^{p^i}}$ и $\lambda\leqslant\lambda_{i-1}$, то

$$\Pi\,(\mathfrak{N}^{(\lambda-1)}_{A^{p^i}},\ A)=[\Pi\,(\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}},\ A)]^\sigma,$$

где $\sigma\equiv p\,(\mathrm{mod}\,p^2)$».

Здесь под $\mathfrak{N}^{(j)}_{B_i}$ понимается вообще j-тый квазинормализатор * некоторого элемента B, порядок которого равен степени p, а λ_i есть наибольшее значение числа λ, при котором

$$\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}}=\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{p^i}}.$$

Наконец, символы вида $\Pi\,(\mathfrak{A},A)$ определены следующим образом:

Пусть $\mathfrak{H}$ есть подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и пусть $\mathfrak{A}$ есть другая подгруппа группы $\mathfrak{G}$, заключающая в себе $\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{A}=\mathfrak{H}+\mathfrak{H}\Gamma_2+\mathfrak{H}\Gamma_3+\ \dots\ +\mathfrak{H}\Gamma_r$.

Пусть $\Gamma_\lambda A=\overline{H}^{(\lambda)}\Gamma_{i_\lambda}$.

($\overline{H}^{(\lambda)}$ есть элемент подгруппы $\mathfrak{H}$). Произведение $\overline{H}^{(1)}\overline{H}^{(2)}\dots\overline{H}^{(r)}$ и обозначается через $\Pi\,(\mathfrak{A},\ A)$.

В приведенных выше леммах в качестве подгруппы $\mathfrak{H}$ берется циклическая группа, порожденная элементом A. По основной теореме теории квазинормализаторов ([2]), если $\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{p^i}}\neq\mathfrak{N}^{(\lambda+1)}_{A^{p^i}}$, то $\mathfrak{N}^{(\lambda+2)}_{A^{p^i}}$ есть подгруппа индекса p группы $\mathfrak{N}^{(\lambda+1)}_{A^{p^i}}$. Исключение может иметь место лишь в случае $p=2$, $\lambda=1$. Неприменимость первой леммы в случае $p=2$ связана именно с этим исключением и имеет место лишь при $\lambda_i=1$. Если в условии теоремы будет указано, что при всяком i $\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{2^i}}=\mathfrak{N}^{(2)}_{A^{2^i}}$, то тем самым будет утверждаться, что $\lambda_i\geqslant 2$ и лемма I будет справедлива и для $p=2$. С другой стороны, лемма II справедлива при $p=2$, если только $\lambda>2$. Если опять-таки в условии теоремы будет оговорено, что $\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{2^i}}=\mathfrak{N}^{(2)}_{A^{2^i}}$ при всяком i, то $\mathfrak{N}^{(\lambda)}_{A^{2^i}}$ может оказаться неравным $\mathfrak{N}^{(\lambda-1)}_{A^{2^i}}$ только при $\lambda>2$ и лемма II также будет применима. Как это следует из определения квазинормализатора, из равенства

$$\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{2^{k-2}}}=\mathfrak{N}^{(2)}_{A^{2^{k-2}}}$$

* Понятие о квазинормализаторе и основные теоремы о квазинормализаторах даны в работе В. К. Туркина ([2]).

будет вытекать справедливость равенства $\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{2^i}} = \mathfrak{N}^{(2)}_{A^{2^i}}$ для всех i (i, очевидно, может пробегать значения 0, 1, 2, ..., $k-2$).

Заметим, что квазинормализатор $\mathfrak{N}^{(1)}_{A^{2^{k-2}}}$ есть не что иное как нормализатор циклической группы $\{A^{2^{k-2}}\}$, а квазинормализатор $\mathfrak{N}^{(2)}_{A^{2^{k-2}}}$ представляет собой нормализатор элемента $A^{2^{k-2}}$. Для того чтобы оба эти нормализатора совпадали, достаточно, чтобы элемент четвертого порядка $A^{2^{k-2}}$ не был сопряжен со своею степенью, иначе говоря, с обратным элементом $(A^{2^{k-2}})^3$. Итак, приходим к следующей теореме:

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\mathfrak{G}$ есть группа порядка $2^\alpha n$ n — нечетное). Пусть A есть элемент порядка 2^k группы $\mathfrak{G}$. Если элемент $A^{2^{k-2}}$ не сопряжен с своим обратным элементом и порядок нормализатора элемента $A^{2^{k-1}}$ относительно группы $\mathfrak{G}$ не делится на 2^{2k}, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, делящегося на n.*

Доказанное предложение может быть дополнено на основании следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть A — элемент порядка 2^k группы $\mathfrak{G}$ порядка $2^\alpha n$ (n — нечетное). Если нормализатор $\mathfrak{N}$ элемента $A^{2^{k-1}}$ совпадает с нормализатором элемента $A^{2^{k-l}}$ и порядок этого нормализатора не делится на 2^{k+l}, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, делящегося на n.*

Доказательство. Исходным пунктом доказательства является следующий критерий непростоты группы, выведенный В. К. Туркиным (3) с помощью метода мономиальных представлений:

«Пусть $\mathfrak{G}$ есть группа и $\mathfrak{H}$ ее подгруппа. Пусть

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}G_2 + \ldots + \mathfrak{H}G_s.$$

Пусть A есть некоторый элемент группы $\mathfrak{G}$. Пусть

$$G_\lambda A = H^{(\lambda)} G_{i_\lambda}$$

($H^{(\lambda)}$ — элемент подгруппы $\mathfrak{H}$). Если произведение

$$H^{(1)} H^{(2)} \ldots H^{(s)}$$

не содержится в коммутанте подгруппы $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель».

Как это следует из доказательства только что приведенной теоремы, речь идет об инвариантной подгруппе, содержащей все элементы, порядок которых взаимно прост с порядком группы $\mathfrak{H}$, т. е. об инвариантной подгруппе, порядок которой делится на наибольший делитель порядка группы $\mathfrak{G}$, взаимно простой с порядком группы $\mathfrak{H}$. В нашем случае за группу $\mathfrak{H}$ мы принимаем циклическую группу, по-

рожденную элементом A. Коммутант ее будет равен единице и утверждение теоремы сводится таким образом к следующему:

Если порядок нормализатора циклической группы $\left\{A^{2^{k-1}}\right\}$ не делится на p^{k+l}, то произведение

$$H^{(1)} H^{(2)} \ldots H^{(s)} \tag{1}$$

не равно единице.

К рассмотрению этого произведения мы теперь и переходим. Нас будут интересовать в первую очередь те вычеты разложения

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}G_2 + \ldots + \mathfrak{H}G_s, \tag{2}$$

которые не принадлежат нормализатору $\mathfrak{N}$ элемента $A^{2^{k-1}}$. Пусть G_k один из таких вычетов. Тогда 2^k элементов

$$G_\alpha, \quad G_{\alpha+1} = G_\alpha A, \quad G_{\alpha+2} = G_\alpha A^2, \ \ldots, \ G_\alpha A^{2^k-1} \tag{3}$$

будут представлять собою 2^k различных вычетов группы $\mathfrak{G}$ по модулю $\mathfrak{H}$. При умножении справа всех элементов (3) на A получим те же элементы

$$G_\alpha A, \ G_\alpha A^2, \ldots, G_\alpha A^{p^k} = G_\alpha.$$

Иначе говоря, считая попрежнему, что

$$G_\lambda A = H^{(\lambda)} G_{i_\lambda}, \tag{4}$$

будем иметь

$$H^{(\alpha)} H^{(\alpha+1)} \ldots H^{(\alpha+2^k-1)} = 1.$$

Итак, в произведении (1) остаются только такие $H^{(\lambda)}$, которым соответствуют, в смысле равенства (4), G_λ, входящие в $\mathfrak{N}$. Пусть теперь

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}N_2 + \ldots + \mathfrak{H}N_r.$$

Умножим все элементы системы вычетов

$$1, \quad N_2, \ldots, N_r \tag{5}$$

справа на A. Система (5) при этом переходит сама в себя, но в каждом члене слева появляется множитель, причем произведение таких множителей равно

$$H^{(1)} H^{(2)} \ldots H^{(s)}.$$

При умножении справа системы (5) на $A^{2^{k-l}}$ очевидно система (5) также перейдет сама в себя, но слева в каждом элементе появятся некоторые множители, причем произведение таких множителей будет равно

$$(H^{(1)} H^{(2)} \ldots H^{(s)})^{2^{k-l}}.$$

другой стороны, по условию теоремы

$$N_i A^{2^{k-l}} = A^{2^{k-l}} N_i \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

так что

$$(H^{(1)} H^{(2)} \ldots H^{(s)})^{2^{k-l}} = A^{r \cdot 2^{k-l}}.$$

Произведение $H^{(1)} H^{(2)} \ldots H^{(s)}$ может равняться единице только при условии, что индекс r нормализатора $\mathfrak{N}$ при разложении по модулю $\mathfrak{H}$ делится на 2^l, т. е. при условии, что порядок нормализатора $\mathfrak{N}$ делится на 2^{k+l}. Таким образом, теорема доказана.

Разумеется, формулируя условие теоремы, мы могли бы вместо элемента порядка 2^k рассмотреть элемент порядка p^k (p — простое число). Доказательство теоремы ни в чем не изменилось бы, если бы только мы дополнительно потребовали совпадения нормализатора элемента $A^{p^{k-1}}$ и нормализатора циклической подгруппы $\{A^{p^{k-1}}\}$. Однако надобности в такой более общей формулировке нет, поскольку для случая $p \neq 2$ имеется более сильная теорема В. К. Туркина (см. выше).

Выведем теперь следующий критерий непростоты группы:

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\mathfrak{P}$—подгруппа Силова порядка p^a некоторой группы $\mathfrak{G}$ порядка $p^a n$. Пусть далее группа $\mathfrak{H}$ порядка p^k входит в $\mathfrak{P}$ и принадлежит центру нормализатора группы $\mathfrak{P}$. Если нормализатор какого-нибудь элемента H (принадлежащего $\mathfrak{H}$) порядка p^l совпадает с нормализатором элемента $H^{p^{l-1}}$ и $k + l > \alpha$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель порядка, делящегося на n.*

Если, в частности, в приведенной формулировке положить $\mathfrak{H} = \mathfrak{P}$, тогда $k = \alpha$. Для элемента H порядка p дополнительное условие равенства нормализаторов тривиально и неравенство $k + l > \alpha$ обязательно имеет место. Таким образом мы приходим к следующему хорошо известному предложению Бернсайда: если $\mathfrak{G}$ порядка g имеет подгруппу Силова $\mathfrak{H}$ порядка p^a и $\mathfrak{H}$ входит в центр нормализатора J группы $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель.

Доказательство. Пусть

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H} G_2 + \ldots + \mathfrak{H} G_s. \tag{6}$$

Пусть далее H — элемент группы $\mathfrak{H}$, удовлетворяющий поставленным условиям, причем

$$G_i H = H^{(i)} G_{\lambda_i}. \tag{7}$$

Теорема будет доказана, если окажется, что произведение

$$H^{(1)} H^{(2)} \ldots H^{(s)}$$

не равно единице.

Нас будут интересовать в первую очередь те вычеты группы $\mathfrak{G}$ по модулю $\mathfrak{H}$, которые не входят в состав нормализатора $\mathfrak{N}$ элемента H. Если вычет G_i не входит в состав группы $\mathfrak{N}$, то все элементы

$$G_i, \quad G_iH, \quad G_iH^2, \ldots, G_iH^{p^l-1}$$

принадлежат различным смежным системам разложения (6), так как из равенства вида

$$H_1G_iH^{t_1} = H_2G_iH^{t_2},$$

где H_1 и H_2 — элементы, принадлежащие группе $\mathfrak{H}$, и $t_1 \neq t_2$, вытекало бы

$$G_i^{-1}H_2^{-1}H_1G_i = H^{t_2-t_1}.$$

Элементы $H_2^{-1}H_1$ и $H^{t_2-t_1}$ не могут быть различны, так как никакие два элемента группы $\mathfrak{H}$ не сопряжены в $\mathfrak{G}$.

С другой стороны, $H_2^{-1}H_1$ не может равняться $H^{t_2-t_1}$, так как совокупность элементов, перестановочных с какой-либо степенью элемента H, исчерпывается нормализатором $\mathfrak{N}$, к которому G_i не принадлежит. Итак, мы установили, что элементы

$$G_i, \quad G_iH, \quad G_iH^2, \ldots, G_iH^{p^l-1} \tag{8}$$

могут быть рассматриваемы как вычеты в разложении (6).

Умножим справа все элементы (8) на H. Получаем:

$$G_iH, \quad G_iH^2, \ldots, G_iH^{p^l} = G_i,$$

т. е. ту же самую систему. Очевидно, в данном случае произведение $H^{(i)}$, соответствующих, в смысле равенства (2), вычетам (3), равно единице. Остается только рассмотреть произведение $H^{(i)}$, соответствующих в том же смысле вычетам группы $\mathfrak{G}$, входящим в состав нормализатора $\mathfrak{N}$. Пусть

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{H} + \mathfrak{H}N_2 + \ldots + \mathfrak{H}N_r.$$

Умножая систему вычетов

$$1, \ N_2, \ldots, N_r$$

справа на H, получаем:

$$H, \quad N_2H = HN_2, \ldots, N_rH = HN_r.$$

Итак,

$$H^{(1)}H^{(2)} \ldots H^{(s)} = H^r.$$

Если группа $\mathfrak{G}$ — простая, то индекс нормализатора $\mathfrak{N}$ при разложении по модулю $\mathfrak{H}$, равный r, должен делиться на p^l, а порядок нормализатора $\mathfrak{N}$ быть кратным p^{k+l}. Таким образом, если $k+l > \alpha$, то группа $\mathfrak{G}$ не может быть простой.

Как следует из приведенного доказательства, теореме 3 можно дать также следующий вид:

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $\mathfrak{P}$ *подгруппа Силова порядка* p^α *некоторой группы* $\mathfrak{G}$ *порядка* $p^\alpha n$. *Пусть далее* H — *элемент порядка* p^l *абелевой группы* $\mathfrak{H}$ *порядка* p^k, *входящей в группу* $\mathfrak{P}$. *Если никакая степень элемента* H *не сопряжена ни с одним элементом группы* $\mathfrak{H}$, *нормализатор элемента* H *совпадает с нормализатором элемента* $H^{p^{l-1}}$ *и* $k + l > \alpha$, *то группа* $\mathfrak{G}$ *имеет нормальный делитель порядка, делящегося на* n.

Научно-исслед. институт математики
Московского гос. университета.

Получено
16. VI. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Туркин В. К., Квазинормализаторы и мономиальные представления, Изв. Ак. Наук СССР, Матем. серия, 1938, № 4.

[2] Turkin W. K., Über Quasinormalisatoren der Elemente in endlichen Gruppen, Матем. сб., 2(44):5, 1937.

[3] Turkin W. K., Über Herstellung und Anwendungen der monomialen Darstellungen endlicher Gruppen, Mathem. Ann., B. III, H. 5, 1935.

P. DUBUQUE. SUR L'ORDRE D'UN ÉLÉMENT DANS UN GROUPE SIMPLE

RÉSUMÉ

En utilisant une méthode de W. Turkin l'auteur déduit le critèrium suivant pour prouver qu'un groupe d'ordre pair n'est pas simple:

THÉORÈME 1. *Soit* $\mathfrak{G}$ *un groupe d'ordre* $2^\alpha n$ *(n étant impair). Soit* A *un élément d'ordre* 2^k *du groupe* $\mathfrak{G}$. *Si l'élément* $A^{2^{k-2}}$ *n'est pas conjugué avec son élément inverse et si le normalisateur de l'élément* $A^{2^{k-1}}$ *par rapport au groupe* $\mathfrak{G}$ *n'est pas divisible par* 2^{2k}, *le groupe* $\mathfrak{G}$ *possède un diviseur normal dont l'ordre est un multiple de* n.

Ensuite en appliquant le théorème fondamental de la théorie des représentations monomiales, l'auteur obtient le résultat suivant:

THÉORÈME 2. *Soit* A *un élément d'ordre* 2^k *d'un groupe* $\mathfrak{G}$ *d'ordre* $2^\alpha n$ *(n étant impair). Si le normalisateur* $\mathfrak{N}$ *de l'élément* $A^{2^{k-1}}$ *coïncide avec le normalisateur de l'élément* $A^{2^{k-l}}$ *et l'ordre de ce normalisateur ne se divise pas par* 2^{k+l}, *le groupe* $\mathfrak{G}$ *a un diviseur normal dont l'ordre est un multiple de* n.

La méthode des représentations monomiales permet aussi d'obtenir la proposition suivante qui est vraie pour les groupes d'ordre pair ainsi que pour ceux d'ordre impair:

THÉORÈME 3. *Soit* $\mathfrak{P}$ *un sous-groupe de Sylow d'ordre* p^α *d'un certain groupe* $\mathfrak{G}$ *d'ordre* $p^\alpha n$. *Soit ensuite* $\mathfrak{H}$ *un groupe d'ordre* p^k *appartenant à* $\mathfrak{P}$ *et au centre du normalisateur du groupe* $\mathfrak{P}$. *Si le normalisateur d'un certain élément* H *(appartenant à* $\mathfrak{H}$*) d'ordre* p^l *coïncide avec le normalisateur de l'élément* $H^{p^{l-1}}$ *et si* $k+l > \alpha$, *alors le groupe* $\mathfrak{G}$ *a un diviseur normal dont l'ordre est un multiple de* n.

Il est facile à voir que le théorème 3 contient comme cas particulier la proposition suivante de Burnside:

Si un groupe $\mathfrak{G}$ d'ordre g possède un sous-groupe de Sylow $\mathfrak{H}$ d'ordre p^α et $\mathfrak{H}$ appartient au centre du normalisateur J du groupe $\mathfrak{H}$, alors le groupe $\mathfrak{G}$ possède un diviseur normal.

Il suit de la démonstration du théorème 3 qu'il peut aussi être énoncé de la manière suivante:

THÉORÈME 4. *Soit $\mathfrak{P}$ un sous-groupe de Sylow d'ordre p^α d'un certain groupe $\mathfrak{G}$ d'ordre $p^\alpha n$. Soit ensuite H un élément d'ordre p^l d'un groupe abelien $\mathfrak{H}$ d'ordre p^k appartenant au groupe $\mathfrak{P}$. Si aucune puissance de l'élément H n'est conjuguée à aucun élément du groupe $\mathfrak{H}$, si le normalisateur de l'élément H coïncide avec le normalisateur de l'élément $H^{p^{l-1}}$ et si $k+l>\alpha$, alors le groupe $\mathfrak{G}$ possède un diviseur normal dont l'ordr est un multiple de n.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Л. Н. СРЕТЕНСКИЙ

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

(*Представлено академиком* **С. А. Чаплыгиным**)

На плоскости $z=0$ даны значения некоторой функции U, симметричные относительно начала координат. Эта функция представляет собою значения ньютоновского потенциала некоторого неизвестного однородного тела плотности единица, находящегося под плоскостью $z=0$. В работе изучается задача об определении формы этого тела.

§ 1. Постановка задачи

Одной из основных задач гравиметрии является определение формы притягивающего тела по тем аномалиям, которые оно создает в нормальном поле ньютоновского потенциала. Рассматривая простейший из представляющихся здесь случаев, допустим, что на бесконечной плоскости даны значения ньютоновского потенциала некоторого тела постоянной плотности, известной заранее. Задача заключается в определении по этим данным формы притягивающего тела.

Эта задача может быть решена, до известной степени, в том предположении, что заданные на плоскости значения потенциала мало отличаются от значений потенциала некоторой сферы, имеющей вполне определенный радиус и положение по отношению к взятой плоскости. По этим значениям мы отыскиваем тело, мало отличающееся от взятой сферы. Для упрощения вычислений, и лишь только с этой целью, мы считаем, что заданные на плоскости значения потенциала симметричны относительно точки пересечения вертикали центра сферы с плоскостью.

§ 2. Выражение потенциала искомого тела

Рассмотрим некоторую сферу радиуса A, центр которой лежит на оси OZ под плоскостью $z=0$ на расстоянии h.

Обозначим через $A\zeta$ неизвестное нам радиальное уклонение некоторой точки поверхности искомого тела от поверхности рассматриваемой сферы. При этом обозначении уравнение искомой поверхности в полярных координатах, имеющих полюс в центре шара, запишется так:

$$r=A(1+\zeta); \tag{1}$$

ζ есть некоторая функция долготы ψ и дополнения широты θ.

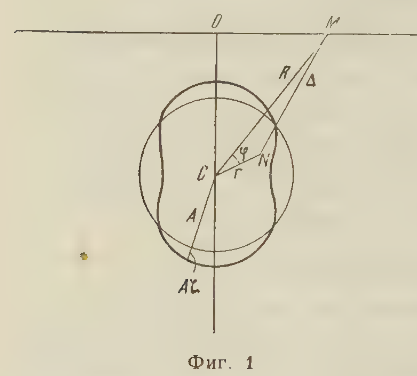
Найдем потенциал искомого тела в какой-нибудь внешней точке M, выражая его через функцию ζ. С этой целью введем в рассмотрение семейство подобных поверхностей

$$r = a(1+\zeta), \tag{2}$$

получающихся при изменении параметра a от 0 до A. Этими поверхностями внутренность всего искомого тела разделяется на тонкие пленки.

Подсчитаем элемент объема $d\tau$. Обозначая через $d\sigma$ элемент поверхности сферы Σ радиуса единица, имеем:

$$d\tau = a^2(1+\zeta)^2 d\sigma \cdot \frac{\partial r}{\partial a} da;$$



Фиг. 1

но $\frac{\partial r}{\partial a} = 1+\zeta$, следовательно,

$$d\tau = a^2(1+\zeta)^3 d\sigma\, da.$$

Обозначим через Δ расстояние притягиваемой точки M от произвольной точки N притягивающего тела:

$$\Delta = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\varphi}. \tag{3}$$

Числа R, r и φ имеют значения, указанные на фиг. 1. Найдем теперь выражение потенциала

$$U = \iiint \frac{d\tau}{\Delta};$$

мы имеем:

$$U = \int_0^A a^2 da \int_{(\Sigma)} \frac{(1+\zeta)^3}{\Delta} d\sigma. \tag{4}$$

Плотность тела считается постоянной и равной единице. Этот подсчет потенциала выполнен нами на основе метода А. М. Ляпунова [1].

Подставим в выражение расстояния Δ вместо r его значение (2); получим

$$\Delta = \sqrt{(a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi) - 2a(R\cos\varphi - a)\zeta + a^2\zeta^2}.$$

Введя обозначения

$$\left.\begin{aligned} &a^2 + R^2 - 2aR\cos\varphi = D^2, \\ &\frac{R\cos\varphi - a}{D} = w, \quad \frac{a\zeta}{D} = \eta, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

найдем обратное значение $\frac{1}{\Delta}$ расстояния Δ:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{D}\frac{1}{\sqrt{1 - 2w\eta + \eta^2}}.$$

Разложим радикал в ряд по степеням η; найдем

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{D}[X_0(w) + \eta X_1(w) + \ldots + \eta^n X_n(w) + \ldots]. \tag{6}$$

$X_n(w)$ есть полином Лежандра степени n:

$$X_n(w)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(w^2-1)^n}{dw^n}.$$

Ряд (6) сходится, если $|\eta|\leqslant|w\pm\sqrt{w^2-1}|$; но

$$w^2-1=\frac{(R\cos\varphi-a)^2}{D^2}-1=-\frac{R^2\sin^2\varphi}{D^2};$$

следовательно,

$$|w\pm\sqrt{w^2-1}|=\sqrt{\frac{(R\cos\varphi-a)^2}{D^2}+\frac{R^2\sin^2\varphi}{D^2}}=1.$$

Итак, ряд (6) сходится, если $|\eta|<1$. Обращаясь к формулам (5), мы видим, что ряд (6) сходится, если $|\zeta|<\frac{D}{a}$. Но так как ряд (6) нам придется интегрировать по a от 0 до A (см. формулу (4)), то мы должны потребовать, чтобы было выполнено неравенство $|\zeta|<\left(\frac{D}{a}\right)_{\min}$. Но наименьшее значение дроби $\frac{D}{a}$ есть $\frac{R-A}{A}$. Отсюда, сходимость ряда, получаемого из формулы (4) при подстановке в нее разложения (6), будет иметь место для тех точек пространства, для которых

$$R>A(1+\zeta_{\max}).$$

В частности, рассматриваемый ряд будет сходиться во всех точках взятой нами плоскости, если

$$\zeta_{\max}<\frac{h-A}{A}. \tag{7}$$

Будем считать в дальнейшем, что это условие соблюдается. Возьмем подинтегральную функцию формулы (4) и подставим в нее вместо $\frac{1}{\Delta}$ разложение (6); получим:

$$a^2\frac{(1+\zeta)^3}{\Delta}=\frac{a^2}{D}(1+3\zeta+3\zeta^2+\zeta^3)\left(X_0+\frac{a\zeta}{D}X_1+\ldots+\frac{a^n\zeta^n}{D^n}X_n+\ldots\right)$$

или

$$a^2\frac{(1+\zeta)^3}{\Delta}=\frac{a^2}{D}X_0+\frac{a^2}{D}\left(3+\frac{a}{D}X_1\right)\zeta+\frac{a^2}{D}\left(3+\frac{3a}{D}X_1+\frac{a^2}{D^2}X_2\right)\zeta^2+$$
$$+\ldots+\frac{a^2}{D}\left(\frac{a^{n-3}}{D^{n-3}}X_{n-3}+3\frac{a^{n-2}}{D^{n-2}}X_{n-2}+3\frac{a^{n-1}}{D^{n-1}}X_{n-1}+\frac{a^n}{D^n}X_n\right)\zeta^n+\ldots$$

Преобразуем общий член этого разложения с помощью формулы

$$X_n(w)=\frac{D^{n+1}}{n!}\frac{\partial^n\frac{1}{D}}{\partial a^n};$$

найдем:

$$\frac{a^{n-3}}{D^{n-3}}X_{n-3}+3\frac{a^{n-2}}{D^{n-2}}X_{n-2}+3\frac{a^{n-1}}{D^{n-1}}X_{n-1}+\frac{a^n}{D^n}X_n=\frac{D}{n!}\frac{\partial^3}{\partial a^3}\left[a^n\frac{\partial^{n-3}\frac{1}{D}}{\partial a^{n-3}}\right].$$

Имея этот результат, находим:

$$a^2 \frac{(1+\zeta)^3}{D} = \frac{a^2}{D} X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} a^2 \frac{\partial^3}{\partial a^3}\left[a^n \frac{\partial^{n-3} \frac{1}{D}}{\partial a^{n-3}} \right].$$

Подставим это разложение в формулу (4); получим для потенциала следующую формулу:

$$U = \int_0^A da \int_{(\Sigma)} \left\{ \frac{a^2}{D} X_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} a^2 \frac{\partial^3}{\partial a^3}\left[a^n \frac{\partial^{n-3} \frac{1}{D}}{\partial a^{n-3}} \right] \right\} d\sigma;$$

но $\int_0^A da \int_{(\Sigma)} \frac{a^2}{D} X_0 \, d\sigma$ есть потенциал сферы радиуса A:

$$\int_0^A da \int_{(\Sigma)} \frac{a^2}{D} X_0 \, d\sigma = \frac{4}{3} \pi A^3 \frac{1}{R},$$

поэтому в той части пространства, где $R > A(1+\zeta_{\max})$, имеет место следующее сходящееся разложение потенциала:

$$U = \frac{4}{3}\pi A^3 \frac{1}{R} + \int_0^A da \int_{(\Sigma)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n!} a^2 \frac{\partial^3}{\partial a^3}\left(a^n \frac{\partial^{n-3} \frac{1}{D}}{\partial a^{n-3}} \right) d\sigma. \tag{8}$$

Это разложение может быть несколько упрощено. Интегрирование по поверхности сферы и интегрирование по переменному a могут быть обменены местами. Интегрирование общего члена разложения по переменному a может быть выполнено:

$$\int_0^A a^2 \frac{\partial^3}{\partial a^3}\left(a^n \frac{\partial^{n-3} \frac{1}{D}}{\partial a^{n-3}} \right) da = A^3 \frac{\partial^2}{\partial A^2}\left(A^{n-1} \frac{\partial^{n-3} \frac{1}{T}}{\partial A^{n-3}} \right).$$

Здесь

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{(D)_{a=A}} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + R^2 - 2AR\cos\varphi}}. \tag{9}$$

Теперь мы можем записать потенциал U в виде следующего ряда:

$$U = \frac{4}{3}\pi A^3 \frac{1}{R} + A^3 \int_{(\Sigma)} \frac{\zeta}{T} d\sigma + \frac{1}{2} A^2 \int_{(\Sigma)} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{A^2}{T} \right) d\sigma +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{A^3}{n!} \int_{(\Sigma)} \zeta^n \frac{\partial^2}{\partial A^2}\left(A^{n-1} \frac{\partial^{n-3} \frac{1}{T}}{\partial A^{n-3}} \right) d\sigma. \tag{10}$$

Рассмотрим функцию $\frac{1}{T}$; мы можем записать ее в виде следующего ряда:

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{R}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{A}{R}\right)^2-2\frac{A}{R}\cos\varphi}}=\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{R}\right)^n X_n(\cos\varphi)=$$

$$=\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{R}\right)^n\left\{X_n(\mu)X_n(\mu')+\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-\mu^2)^{\frac{i}{2}}(1-\mu'^2)^{\frac{i}{2}}\cos i(\psi-\psi')}{(n-i+1)(n-i+2)\dots(n+i)}\cdot\frac{d^iX_n}{d\mu^i}\cdot\frac{d^iX'_n}{d\mu'^i}\right\}$$

где $\mu=\cos\theta$, $\mu'=\cos\theta'$,

$$\cos\varphi=\mu\mu'+\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\psi-\psi').$$

Если рассматриваемое тело симметрично относительно вертикали центра сферы, то $\frac{1}{T}$ достаточно взять в виде следующего более простого ряда:

$$\frac{1}{T}=\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{R}\right)^n X_n(\mu)X_n(\mu'). \tag{11}$$

Формула (10) в предположении указанной симметрии может быть записана проще:

$$U=\frac{4}{3}\pi A^3\frac{1}{R}+2\pi A^3\int_{-1}^{+1}\frac{\zeta}{T}d\mu'+\pi A^2\int_{-1}^{+1}\zeta^2\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{A^2}{T}\right)d\mu'+$$

$$+2\pi\sum_{n=3}^{\infty}\frac{A^3}{n!}\int_{-1}^{+1}\zeta^n\frac{\partial^2}{\partial A^2}\left(A^{n-1}\frac{\partial^{n-3}\frac{1}{T}}{\partial A^{n-3}}\right)d\mu'. \tag{12}$$

§ 3. Основные уравнения задачи

Допустим, что на плоскости XOY известны значения потенциала $U_{z=0}$ искомого тела. Мы предполагаем, что эти значения симметричны относительно начала координат и что, кроме того, эти значения мало отличаются от значений потенциала однородной сферы радиуса A с центром в точке $(0, 0, -h)$. Обозначая через ρ расстояние точки плоскости от начала координат, мы задаем $U_{z=0}$ в следующем виде:

$$U_{z=0}=\left[\frac{4}{3}\pi A^3\frac{1}{R}\right]_{z=0}+\alpha f(\rho), \tag{13}$$

где $f(\rho)$ есть заданная функция переменного ρ, а число α — малый параметр.

Переменное ρ можно выразить через косинус дополнения широты точки, лежащей на плоскости:

$$\rho=h\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}; \tag{14}$$

кроме того,

$$\frac{1}{R}=\frac{\mu}{h}. \qquad (15)$$

Соотношение (14) позволяет нам записать условие (13) в ином виде:

$$U_{z=0}=\frac{4}{3}\pi A^3\frac{\mu}{h}+\alpha F(\mu). \qquad (16)$$

Составим на основании формулы (12) левую часть этого условия. Имеем:

$$\left(\frac{1}{T}\right)_{z=0}=\frac{\mu}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{h}\right)^n\mu^n X_n(\mu)\,X_n(\mu'). \qquad (17)$$

Обозначим сумму правой части через $\frac{1}{\delta}$:

$$\frac{1}{\delta}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{h}\right)^n\mu^n X_n(\mu)\,X_n(\mu'). \qquad (18)$$

Обратимся теперь к формуле (12) и найдем $U_{z=0}$; получим:

$$U_{z=0}=\frac{4}{3}\pi A^3\frac{\mu}{h}+2\pi A^3\frac{\mu}{h}\int_{-1}^{+1}\frac{\zeta}{\delta}\,d\mu'+\pi A^2\frac{\mu}{h}\int_{-1}^{+1}\zeta^2\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{A^2}{\delta}\right)d\mu'+$$

$$+2\pi\frac{\mu}{h}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{A^3}{n!}\int_{-1}^{+1}\zeta^n\frac{\partial^2}{\partial A^2}\left(A^{n-1}\frac{\partial^{n-3}\frac{1}{\delta}}{\partial A^{n-3}}\right)d\mu'.$$

Поставим это разложение в левую часть уравнения (16); после ряда простых преобразований найдем уравнение для определения функции ζ:

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\zeta}{\delta}\,d\mu'+\frac{1}{2A}\int_{-1}^{+1}\zeta^2\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{A^2}{\delta}\right)d\mu'+$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_{-1}^{+1}\zeta^n\frac{\partial^2}{\partial A^2}\left(A^{n-1}\frac{\partial^{n-3}\frac{1}{\delta}}{\partial A^{n-3}}\right)d\mu'=\lambda\Phi(\mu). \qquad (19)$$

Здесь λ обозначает $\frac{\alpha}{2\pi A^3}$ и $\Phi(\mu)=\frac{h}{\mu}F(\mu)$.

К уравнению этого же вида мы пришли бы, отыскивая форму тела по значениям нормальной производной его потенциала на плоскости. В этом последнем случае $\frac{1}{\delta}$ будет определяться рядом

$$\frac{1}{\delta}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{A}{h}\right)^n\mu^n X_n(\mu)\,X_n(\mu').$$

§ 4. Аналитические свойства потенциала тела вращения

Возьмем выражение потенциала однородного тела плотности 1

$$U=\int\frac{d\tau}{\Delta}$$

и выведем из него ряд свойств функции, изображающей значения на плоскости этого потенциала.

Потенциал U тела, симметричного относительно оси OZ, может быть представлен следующим рядом:

$$U=\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{R^n}X_n(\mu), \tag{20}$$

где

$$a_n=\frac{2\pi}{n+3}A^{n+3}\int_{-1}^{+1}(1+\zeta)^{n+3}X_n(\mu')\,d\mu'.$$

Ряд (20) будет сходиться во всех точках плоскости $z=0$, если будет соблюдаться условие (7). Выполнимость этого условия мы принимаем.

Условие (7) мы выразим сейчас в более определенной форме, подчеркнув, что $\zeta_{\max}$ не может равняться числу $\frac{h-A}{A}$, а равно некоторому числу γ, меньшему чем $\frac{h-A}{A}$. Напишем выражение функции U в точках плоскости $z=0$:

$$U=\frac{\mu}{h}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{h^n}\mu^n X_n(\mu). \tag{21}$$

Поставим теперь задачу об изучении свойств функций, определяемых разложениями вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}b_n\mu^n X_n(\mu), \tag{22}$$

где μ — комплексное переменное.

Для нашего ряда (21) коэффициенты b_n удовлетворяют неравенству

$$|b_n|=\left|\frac{a_n}{h^n}\right|\leqslant\frac{4\pi h^3}{n+3}\,\frac{A^{n+3}}{h^{n+3}}(1+\gamma)^{n+3}.$$

Так как $\gamma<\frac{h-A}{A}$, то можно найти такое число $q<1$, которое позволило бы вместо предыдущего неравенства взять такое:

$$|b_n|<Nq^n, \tag{23}$$

где N — некоторое постоянное число. Будем в дальнейшем рассматривать ряды (22) с коэффициентами, подчиняющимися неравенству (23). Такие ряды будем называть регулярными.

Найдем теперь область сходимости регулярных рядов. Между тремя последовательными полиномами Лежандра существует следующее рекуррентное соотношение:

$$(n+1)X_{n+1}-(2n+1)\mu X_n+nX_{n-1}=0.$$

Отсюда многочлены

$$Y_n=\mu^n X_n(\mu)$$

будут удовлетворять соотношению

$$(n+1)Y_{n+1}-(2n+1)\mu^2 Y_n + n\mu^2 Y_{n-1}=0.$$

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Y_{n+1}}{Y_n}$. Poincaré указал правило для определения предела отношения двух последовательных полиномов, связанных тройным рекуррентным соотношением ([3]). Согласно этому правилу искомый предел будет равен тому корню α квадратного уравнения

$$\alpha-\mu^2\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}+\frac{1}{\alpha}\mu^2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=0,$$

модуль которого наибольший *. Выполняя переход к пределу, получаем

$$\alpha^2-2\mu^2\alpha+\mu^2=0. \tag{24}$$

Отсюда

$$\alpha=\mu^2\pm\sqrt{\mu^4-\mu^2}.$$

Для исследования этих решений положим

$$\mu=\frac{1}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right). \tag{25}$$

В новом переменном ξ корни α_1 и α_2 уравнения (24) запишутся так:

$$\alpha_1=\frac{1}{2}(1+\xi^2),\quad \alpha_2=\frac{1}{2}\,\frac{1+\xi^2}{\xi^2}.$$

Преобразование (25) ставит в соответствие плоскости комплексного переменного μ, разрезанной вдоль прямой $-1,+1$, внешнюю часть круга $|\xi|=1$ плоскости комплексного переменного ξ или внутренность того же круга.

Выберем в качестве области плоскости переменного ξ, конформно отображаемой на плоскость переменного μ, внешнюю часть круга $|\xi|=1$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Y_{n+1}}{Y_n}$ должен быть приравнен $\frac{1}{2}(1+\xi^2)$.

Повторяя общие рассуждения Poincaré, относящиеся к сходимости рядов многочленов, связанных рекуррентными соотношениями, мы приходим к тому заключению, что область абсолютной и равномерной сходимости ряда (22) ограничена кривой

$$\frac{1}{2}|1+\xi^2|=R,\quad |\xi|\geqslant 1.$$

R есть радиус круга сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\mu^n$.

Так как ряд (22) регулярный, то имеет место неравенство (23) и отсюда $R\geqslant\frac{1}{q}>1$.

* Исключительный случай, который может представиться при применении этого правила: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{Y_{n+1}}{Y_n}$ равен меньшему корню уравнения, в данном случае не имеет места в силу выбранных значений многочленов Y_0 и Y_1: $Y_0=X_0$, $Y_1=\mu X_1$.

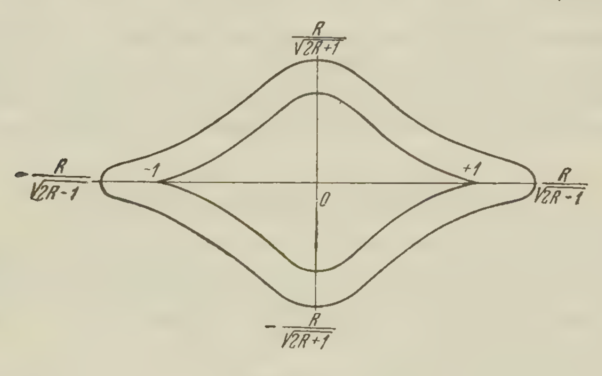
Таким образом ряд (22) сходится во всяком случае внутри области

$$\frac{1}{2}|1+\xi^2|<\frac{1}{q}, \quad |\xi|\geqslant 1.$$

Кривая линия $\frac{1}{2}|1+\xi^2|=R$, представляющая собою овал Кассини, переходит на плоскости μ в некоторую замкнутую кривую, симметричную относительно двух координатных осей и содержащую внутри себя отрезок $-1, +1$. Внутри всей этой кривой ряд (22) сходится и изображает некоторую голоморфную функцию переменного μ. Горизонтальный диаметр этой кривой больше вертикального. Величины горизонтального и вертикального диаметров суть

$$\frac{2R}{\sqrt{2R-1}}, \quad \frac{2R}{\sqrt{2R+1}}.$$

С увеличением R от единицы длины этих диаметров увеличиваются. При $R=1$ горизонтальный диаметр равен 2, а вертикальный $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (фиг. 2).



Фиг. 2

Число R в нашем исследовании больше 1, следовательно, область сходимости ряда (22) охватывает кривую с диаметрами 2 и $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Отсюда следует, что ряд (22) в нашем случае не может изображать произвольную аналитическую функцию. Область голоморфизма функции, изображаемой рядом (22), содержит всегда внутри себя кривую, полученную из кривой $\frac{1}{2}|1+\xi^2|=1$ преобразованием (25).

Посмотрим теперь, какой вид будет иметь область сходимости ряда (22) в переменном ρ:

$$\rho=h\,\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}.$$

Мы имеем:

$$\xi=\mu\pm\sqrt{\mu^2-1}, \quad 1+\xi^2=\frac{2h}{h\mp\rho i}.$$

Следовательно, область сходимости ряда (22) в переменном ρ будет определяться неравенством

$$|\rho \pm hi| > \frac{h}{R}.$$

Таким образом, значения потенциала тела вращения в точках плоскости, перпендикулярной оси вращения, представляют собою значения некоторой аналитической функции, голоморфной вне двух кругов:

$$|\rho + hi| = \frac{h}{R}, \quad |\rho - hi| = \frac{h}{R}.$$

Рассмотрим новое комплексное переменное τ, связанное с переменным μ соотношением

$$\mu^2 = \frac{1}{\tau} \frac{1}{2-\tau}.$$

Области плоскости переменного μ, находящейся вне кривой сходимости ряда (22), отвечает внутренность круга $|\tau| = \frac{1}{R}$ плоскости комплексного переменного τ.

На основании этого факта мы можем утверждать, пользуясь теорией рядов Faber'a ([4]), что всякая функция, голоморфная внутри кривой сходимости ряда вида (22), может быть представлена внутри области, ограниченной этой кривой, равномерно сходящимся рядом (22).

§ 5. Решение основного уравнения

Вернемся теперь к уравнению (19), определяющему неизвестную функцию ζ. Функция $\Phi(\mu)$ связана со значениями потенциала $F(\mu)$ соотношением $\Phi = \frac{h}{\mu} F(\mu)$. Функция $\Phi(\mu)$ может быть изображена регулярным рядом вида (22):

$$\Phi(\mu) = \sum_{n-1}^{\infty} b_n \mu^n X_n(\mu), \quad |b_n| < Nq^n. \tag{26}$$

Подставим это разложение в правую часть уравнения (19). Будем искать решение этого уравнения в виде степенного ряда по малому параметру λ:

$$\zeta = \zeta_1 \lambda + \zeta_2 \lambda^2 + \ldots + \zeta_n \lambda^n + \ldots \tag{27}$$

Подставляя это разложение в уравнение (19), приходим к системе уравнений для определения неизвестных коэффициентов $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} \frac{\zeta_1(\mu')}{\delta} d\mu' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu^n X_n(\mu), \\ &\int_{-1}^{+1} \frac{\zeta_2(\mu')}{\delta} d\mu' = -\frac{1}{2A} \int_{-1}^{+1} \zeta_1^2 \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{A^2}{\partial}\right) d\mu', \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{-1}^{+1} \frac{\zeta_3(\mu')}{\delta}\, d\mu' = -\frac{1}{2A}\int_{-1}^{+1} 2\zeta_1\zeta_2 \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{A^2}{\delta}\right) d\mu' - \int_{-1}^{+1} \frac{\zeta_1^3}{3!}\frac{\partial^2}{\partial A^2}\left(\frac{A^2}{\delta}\right) d\mu', \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\int_{-1}^{+1} \frac{\zeta_r(\mu')}{\delta}\, d\mu' = -\frac{1}{r!}\frac{\partial^r}{\partial \lambda^r}\left\{\frac{1}{2A}\int_{-1}^{+1} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{A^2}{\delta}\right) d\mu' + \right. \\
&\qquad\left. + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!}\int_{-1}^{+1} \zeta^n \frac{\partial^2}{\partial A^2}\left(A^{n-1}\frac{\partial^{n-3}\frac{1}{\delta}}{\partial A^{n-3}}\right) d\mu'\right\}_{\lambda=0} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

Таким образом, определение неизвестной функции ζ привелось к решению серии линейных интегральных уравнений 1-го рода. Рассмотрим сначала первое уравнение нашей системы; подставляя вместо $\frac{1}{\delta}$ его разложение (18), мы записываем это уравнение так:

$$\int_{-1}^{+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{h}\right)^n \mu^n X_n(\mu)\, X_n(\mu')\, \zeta_1(\mu')\, d\mu' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu^n X_n(\mu).$$

Отсюда

$$\int_{-1}^{+1} X_0(\mu')\, \zeta_1(\mu')\, d\mu' = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} X_n(\mu')\, \zeta_1(\mu')\, d\mu' = \left(\frac{h}{A}\right)^n b_n \quad [n > 0].$$

Следовательно,

$$\zeta_1(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2}\left(\frac{h}{A}\right)^n b_n X_n(\mu). \qquad (29)$$

Коэффициенты b_n подчинялись до сих пор лишь неравенству $|b_n| < Nq^n$, где q — некоторое число, меньшее 1. Будем теперь предполагать, что это число меньше чем $\frac{A}{h}$:

$$q < \frac{A}{h}. \qquad (30)$$

Если число q удовлетворяет неравенству (30), ряд (29) будет сходиться и изображать некоторую непрерывную функцию μ. В силу неравенства (30) ряд (29) есть регулярный ряд с показателем регулярности q', определяемым неравенством

$$\frac{h}{A} q < q' < 1.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{2n+1}{2}\left(\frac{h}{A}\right)^n b_n\right| < N' q'^n$$

и

$$|\zeta_1| < \frac{N'q'}{1-q'}.$$

Возьмем теперь уравнение для определения функции $\zeta_2(\mu')$:

$$\int_{-1}^{+1}\zeta_2(\mu')\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{h}\right)^n\mu^n X_n(\mu)\,X_n(\mu')\,d\mu'=$$
$$=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\zeta_1^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\left(\frac{A}{h}\right)^n\mu^n X_n(\mu)\,X_n(\mu\ )\,d\mu'.$$

Отсюда

$$\int_{-1}^{+1}\zeta_2(\mu')\,X_n(\mu')\,d\mu'=-\frac{n+2}{2}\int_{-1}^{+1}\zeta_1^2 X_n(\mu')\,d\mu'.$$

Следовательно,

$$\zeta_2(\mu')=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)\,(2n+1)}{2}X_n(\mu)\int_{-1}^{+1}\zeta_1^2(\mu')\,X_n(\mu')\,d\mu'. \tag{31}$$

Не останавливаясь пока на вопросе о сходимости этого ряда, перейдем к дальнейшим уравнениям системы (28). Определив функцию $\zeta_2(\mu')$, мы можем найти функцию $\zeta_3(\mu')$ и т. д. Определение всех функций $\zeta_3(\mu')$, $\zeta_4(\mu')$, ... происходит по одному и тому же способу: находятся коэффициенты разложения этих функций в ряды полиномов Лежандра, а затем составляются и самые ряды.

Указав таким образом способ вычисления коэффициентов ряда (27), мы должны теперь доказать сходимость этого ряда, установив, однако, сначала сходимость рядов, определяющих самые коэффициенты.

§ 6. О регулярных рядах сферических функций

Рассмотрим регулярный ряд сферических функций(²)

$$f(\mu)=a_0X_0+a_1X_1+\ldots+a_nX_n+\ldots, \tag{32}$$
$$|a_n|<Mq^n,\quad q<1,$$

и оценим коэффициент разложения n-ой степени функции $f(\mu)$ в ряд по функциям Лёжандра. Коэффициент при $X_m(\mu)$ в рассматриваемом разложении определяется формулой

$$b_m=\frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{+1}[f(\mu)]^n X_m(\mu)\,d\mu.$$

Для оценки этого коэффициента применим рассуждения Ляпунова. Для вычисления коэффициента b_m достаточно, при возведении $f(\mu)$ в степень n, учесть лишь те слагаемые, которые содержат многочлены по μ степени не ниже m. Каждый из таких многочленов (состоящий из произведения функций Лежандра) будет иметь впереди себя коэффициентом произведение чисел a_k, и сумма индексов этих чисел будет равна степени p многочлена. В силу регулярности ряда (32) это произведение будет меньше, нежели M^nq^p. При исследуемом возведении $f(\mu)$ в степень n мы будем иметь столько отдельных многочленов сте-

пени p, состоящих из произведения функций Лежандра, каков коэффициент при q^p в разложении

$$(1+q+q^2+\ldots)^n$$

по степеням q. Обозначим этот коэффициент через γ_p:

$$(1+q+q^2+\ldots)^n=\sum_{p=0}^{\infty}\gamma_p q^p.$$

В силу этих соображений и приняв в расчет, что $|X_n|<1$, мы получаем следующую оценку коэффициента b_m:

$$|b_m|<(2m+1)M^n\sum_{p=m}^{\infty}\gamma_p q^p. \tag{33}$$

Сумма $\sum\limits_{p=m}^{\infty}\gamma_p q^p$, входящая в эту оценку, может быть в свою очередь оценена помощью весьма простого выражения. Совершенно ясно, что эта сумма есть остаточный член R_{m-1} разложения $\frac{1}{(1-q)^n}$ в ряд Маклорена. Возьмем выражение R_{m-1} в форме, данной Коши ([5]):

$$R_{m-1}=\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{(m-1)!}q^m\left(\frac{1-\theta}{1-\theta q}\right)^{m-1}\frac{1}{(1-\theta q)^{n+1}};\quad 0<\theta<1.$$

Отсюда

$$|b_m|<(2m+1)M^n\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{(m-1)!}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta q}\right)^{m-1}\frac{q^m}{(1-\theta q)^{n+1}}. \tag{34}$$

Это неравенство мы и имели в виду установить.

§ 7. Доказательство сходимости ряда, изображающего искомую функцию ζ

Рассмотрим последнее уравнение системы (28). Решая это уравнение относительно функции ζ_r, получаем:

$$\zeta_r=-\frac{1}{r!}\frac{\partial^r}{\partial\lambda^r}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}X_m(\mu)\sum_{n=2}^{m+3}\frac{2m+1}{2}\cdot\frac{(m+2)\ldots(m-n+4)}{n!}\int_{-1}^{+1}\zeta^n X_m d\mu'\right\}_{\lambda=0}. \tag{35}$$

Используем эту формулу для доказательства сходимости ряда (27). Каждый коэффициент этого ряда, составляясь с помощью умножения регулярных рядов, изображающих предыдущие коэффициенты, является регулярным рядом. Обозначим через q показатель регулярности, общий всем этим рядам. Из теоремы Ляпунова об умножении регулярных рядов следует, что такой показатель действительно может быть найден. Этот показатель q может произвольно мало отличаться от введенного ранее числа q как показателя регулярности ряда (26). Таким образом,

$$\zeta_r=a_0^rX_0+a_1^rX_1+\ldots+a_n^rX_n+\ldots,$$
$$|a_n^r|<M_rq^n,$$

и следовательно, каждый коэффициент разложения функции ζ_r в ряд полиномов Лежандра будет меньше соответствующего коэффициента разложения функции

$$\frac{M_r}{\sqrt{1-2q\mu+q^2}}.$$

Отсюда следует, что если мы докажем сходимость ряда

$$\frac{M_1\lambda+M_2\lambda^2+\ldots+M_r\lambda^r+\ldots}{\sqrt{1-2q\mu+q^2}},$$

то вместе с тем докажем сходимость и ряда (27).

Введем обозначение

$$M(\lambda)=M_1\lambda+M_2\lambda^2+\ldots+M_n\lambda^n+\ldots$$

Интеграл $\frac{2m+1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}\zeta X_m d\mu'$ по своей абсолютной величине не превосходит $M(\lambda)\,q^m$; следовательно, по оценке предыдущего параграфа будем иметь:

$$\left|\frac{2m+1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}\zeta^n X_m d\mu'\right|<$$

$$<(2m+1)\,M^n(\lambda)\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{(m-1)!}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta q}\right)^{m-1}\frac{q^m}{(1-\theta q)^{n+1}}.$$

Рассмотрим теперь двойную сумму формулы (35)

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty}X_m(\mu)\sum_{n=2}^{m+3}\ldots\right|<$$

$$<\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{m+3}(2m+1)\cdot\frac{(m+2)\ldots(m-n+4)}{n!}\cdot\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{(m-1)!}\times$$

$$\times M^n(\lambda)\left(\frac{1-\theta}{1-\theta q}\right)^{m-1}\frac{q^m}{(1-\theta q)^{n+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{M^n(\lambda)}{n!}\cdot\frac{(1-\theta q)^{-n}}{1-\theta}\times$$

$$\times\sum_{m=n-3}^{\infty}(2m+1)(m+2)\ldots(m-n+4)\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{(m-1)!}\left(\frac{1-\theta}{1-\theta q}\right)^m q^m. \quad (36)$$

Оценим в зависимости от индекса n внутреннюю сумму

$$S=\sum_{m=n-3}^{\infty}(2m+1)(m+2)\ldots(m-n+4)\frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{(m-1)!}y^m, \quad (37)$$

$$y=\frac{1-\theta}{1-\theta q}\,q.$$

Наша задача — установить сходимость ряда (36), поэтому мы можем оценивать сумму S для больших значений n. Рассмотрим дробь

$$u_m = \frac{n(n+1)\ldots(n+m-1)}{(m-1)!},$$

входящую в выражение общего члена ряда (37). Найдем отношение $\frac{u_{m+1}}{u_m}$. Это отношение, равное $1+\frac{n}{m}$, остается для всех значений m ограниченным по своей величине некоторым числом a. Отсюда

$$u_m < a^{m-n+1}u_{n-3} = a^{m-n+1}\frac{n(n+1)\ldots(2n-4)}{(n-4)!}.$$

Поэтому

$$S < \frac{n(n+1)\ldots(2n-4)}{a^{n-1}(n-4)!}\sum_{m=n-3}^{\infty}(2m+1)(m+2)\ldots(m-n+4)(ay)^m.$$

Обозначим этот новый ряд через S_1:

$$S_1 = \sum_{m=n-3}^{\infty}(2m+1)(m+2)\ldots(m-n+4)(ay)^m.$$

Отметим, что

$$S < \frac{n(n+1)\ldots(2n-4)}{a^{n-1}(n-4)!}S_1.$$

Ряд S_1 можно просуммировать; мы имеем:

$$\sum_{m=n-3}^{\infty}(m+2)(m+1)\ldots(m-n+4)z^m = z^{n-3}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{(n-1)!\,z^{n-3}}{(1-z)^n}.$$

Найдем теперь сумму

$$\sum_{m=n-3}^{\infty}2m(m+2)(m+1)\ldots(m-n+4)z^m = 2z\frac{d}{dz}\frac{(n-1)!\,z^{n-3}}{(1-z)^n} = \frac{2(n-1)!\,(n+3z-3)\,z^{n-3}}{(1-z)^{n+1}}.$$

Следовательно,

$$S_1 = \frac{(n-1)!\,z^{n-3}}{(1-z)^n} + \frac{2(n-1)!\,z^{n-3}(n+3z-3)}{(1-z)^{n+1}} = \frac{(n-1)!\,z^{n-3}}{(1-z)^{n+1}}[2n-5(1+z)] < \frac{2n!\,z^{n-3}}{(1-z)^{n+1}}.$$

Итак,

$$S < \frac{n(n+1)\ldots(2n-4)}{(n-4)!}\cdot\frac{2n!\,y^{n-3}}{a^2(1-ay)^{n+1}}$$

или

$$S < n(n+1)\ldots(2n-4)\,n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\frac{2y^{n-3}}{a^2(1-ay)^{n+1}}.$$

Вернемся теперь к ряду (36). Мы получаем, применяя к общему его члену найденные выше оценки:

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} X_m(\mu) \sum_{n=2}^{m+3} \ldots \right| < \frac{2}{a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{M^n(\lambda)}{n!} \cdot \frac{(1-\theta q)^{-n}}{1-\theta} \times$$

$$\times\, n(n+1)\ldots(2n-4)\,n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot\frac{y^{n-3}}{(1-ay)^{n+1}}$$

или

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} X_m(\mu) \sum_{n=2}^{m+3} \ldots \right| < \frac{2}{a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)\ldots(2n-4)\,n(n-1)(n-2)(n-3)}{n!} \times$$

$$\times \frac{1}{y^3(1-\theta)(1-ay)}\left[\frac{yM(\lambda)}{(1-\theta q)(1-ay)}\right]^n = \frac{1}{a^2y^3(1-\theta)(1-ay)} \times$$

$$\times \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n+1)\ldots(2n-4)\,n(n-1)(n-2)(n-3)}{n!}\left[\frac{(1-\theta)\,q\,M(\lambda)}{(1-\theta q)^2(1-ay)}\right]^n.$$

Не представляет труда видеть, что этот ряд сходится для достаточно малых значений $M(\lambda)$. Этот результат устанавливает, следовательно, тот факт, что при замене в формуле (35) интеграла

$$\frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{+1} \zeta^n X_m d\mu'$$

величиною, большей его и даваемой формулами (33) и (34), мы получаем для малых $M(\lambda)$ сходящийся ряд.

Ряд, находящийся в формуле (33), пишется так:

$$\sum_{p=m}^{\infty} \gamma_p q^p = \sum_{p=m}^{\infty} \frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{p!}\, q^p$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{2m+1}{2}\int_{-1}^{+1} \zeta^n X_m(\mu')\, d\mu'\right| < (2m+1)\, M^n(\lambda) \sum_{p=m}^{\infty} \frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{p!}\, q^p.$$

Если мы теперь подставим правую часть этого неравенства вместо соответствующего множителя формулы (35) и заменим вместе с тем $X_m(\mu)$ единицей, то получим некоторое число, ограничивающее сверху модуль функции $\zeta_r(\mu)$. Это число мы можем приравнять числу $\frac{M_r}{1-q}$, которое согласно предыдущему ограничивает сверху функцию ζ_r. Итак,

$$\frac{M_r}{1-q}=\frac{1}{r!}\frac{\partial^r}{\partial\lambda^r}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{m+3}(2m+1)M^n(\lambda)\frac{(m+2)\ldots(m-n+4)}{n!}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{p=m}^{\infty}\frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{p!}q^p\right\}_{\lambda=0}. \qquad (38)$$

Для функции $\zeta_1(\mu)$ ограничение можно получить, исходя из формулы (29) через ограничение для заданной функции $\Phi(\mu)$. Это неравенство для функции $\zeta_1(\mu)$ мы запишем в виде следующего тождества:

$$\frac{M_1}{1-q}=\frac{M_1}{1-q}. \qquad (38')$$

M_1 определяется по заданной функции $\Phi(\mu)$. Умножим равенство (38) на λ^r, а равенство (38′) на λ и сложим результаты умножения, придав числу r все целые значения от 2 до ∞. Получим:

$$\frac{M}{1-q}=\frac{M_1\lambda}{1-q}+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=2}^{m+3}(2m+1)M^n\frac{(m+2)\ldots(m-n+4)}{n!}\sum_{p=m}^{\infty}\frac{n(n+1)\ldots(n+p-1)}{p!}q^p.$$

Таким образом, для определения функции $M(\lambda)$ мы получили трансцендентное уравнение. Полагая в этом уравнении $\lambda=0$, мы видим, что оно удовлетворяется значением функции $M=0$. Следовательно, наше уравнение, которое имеет лишь один член с первой степенью M, а именно $\frac{M}{1-q}$, обладает единственным голоморфным решением, изображаемым степенным рядом по переменному λ, сходящимся вблизи нулевого значения этого параметра. Все коэффициенты степенного ряда $M(\lambda)$ положительны. Таким образом, мажоранта ряда, изображающего искомую функцию ζ, построена, и мы можем утверждать, что ряд (27) сходится и представляет решение нашей задачи для достаточно малых значений параметра λ или $\alpha=2\pi A^3\lambda$.

Следовательно, мы пришли к такому результату: если на плоскости $z=0$ дана такая функция U, которая может быть представлена в виде ряда

$$U=\frac{4}{3}\pi A^3\frac{\mu}{h}+\alpha\frac{\mu}{h}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\mu^nX_n(\mu) \qquad (39)$$

с коэффициентами b_n, удовлетворяющими условию $|b_n|<Nq^n$, где $q<\frac{A}{h}$ и числа A и h даны $(A<h)$, то можно найти под плоскостью $z=0$ для достаточно малых значений параметра задачи α такое однородное тело плотности 1, симметричное относительно оси OZ и мало уклоняющееся от сферы радиуса A, находящейся на глубине h, которое в точках плоскости $z=0$ обладало бы заданными значениями (39) своего ньютоновского потенциала. Функция U зависит от перемен-

ного μ, связанного с расстоянием ρ точки плоскости $z=0$ от начала координат формулой

$$\mu = \frac{h}{\sqrt{h^2+\rho^2}}.$$

Поставленная нами задача, решение которой при определенных условиях изложено выше, имеет лишь одно решение. Этот последний результат содержится в недавних весьма замечательных работах П. С. Новикова (6).

Научно-иссл. институт механики Московского гос. университета.

Поступило 27. V. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

1 Liapounoff A. M., Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes, Mémoires de l'Ac. de Sci. de St.-Pétersbourg, cl. phys.-math., sér. 8, 1903.

2 Liapounoff A. M., Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes..., I partie, St.-Pétersbourg, 1906, pp. 38—41.

3 Poincaré H., Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies, § 2, 7, Oeuvres, t. I, 1928, Paris.

4 Montel P., Leçons sur les séries de polynômes à une variable complexe, Paris, 1910, pp. 87—92.

5 Гурса, Курс математического анализа, т. I, стр. 109, изд. 1, 1911.

6 Новиков П. С., Об единственности решения обратной задачи потенциала. Доклады Академии Наук СССР, т. XVIII, № 3. 1938.

L. SRETTENSKY. ON THE INVERSE PROBLEM OF POTENTIAL THEORY

SUMMARY

In the plane $z=0$ values of a certain function U are given which are symmetrical with respect to the origin of coordinates. This function gives the values of the Newtonian potential of some unknown homogeneous body of unit density located below the plane $z=0$. The problem consists in the determination of the shape of this body.

What concerns the function U representing the potential of the unknown body in the plane $z=0$, it will be assumed that its values differ but little from the values of the potential of a homogeneous sphere of radius A, unit density and the centre at the point $(0, 0, -h)$.

In Art. 4 we show that the function U cannot be taken arbitrarily. Denoting by ρ the distance of a point in the plane $z=0$ from the origin of coordinates and by μ the value $\frac{h}{\sqrt{h^2+\rho^2}}$, we assume that the function U, as a function of the complex variable μ, can be represented by the following series:

$$U = \frac{4}{3}\pi\frac{A^3}{h}\mu + 2\pi\frac{A^3}{h}\mu\lambda\sum_{n=1}^{\infty} b_n\mu^n X_n(\mu),$$

where $X_n(\mu)$ is Legendre's polynomial of the order n. The region of convergence of the series always contains, if some limitations inherent in the nature of the problem are imposed upon the coefficients b_n, the

segment $(-1, +1)$ of the real axis and has in the vertical direction some minimum extent. The part of the plane external to this region of convergence may be transformed $\left(\mu^2 = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{2-\tau}\right)$ into the interior of some circle in the plane of the variable τ. In virtue of what has been said above, every analytical function which is holomorphic within the region of convergence of the series in question may be represented within this region by a convergent series of the kind here treated of.

The equation of the required surface can be represented in the following form:

$$r = A(1 + \zeta).$$

The function ζ is to be determined; r is measured from the point $(0, 0, -h)$. The function ζ depends only on the variable μ. For the determination of this function we obtain the following equation:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\zeta(\mu')}{\delta} d\mu' + \frac{1}{2A} \int_{-1}^{1} \zeta^2(\mu') \frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{A^2}{\delta}\right) d\mu' +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-1}^{1} \zeta^n(\mu') \frac{\partial^2}{\partial A^2} \left(A^{n-1} \frac{\partial^{n-3} \frac{1}{\delta}}{\partial A^{n-3}}\right) d\mu' = \lambda \, \Phi(\mu), \qquad (1)$$

where

$$\Phi(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mu^n X_n(\mu),$$

$$\frac{1}{\delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{h}\right)^n \mu^n X_n(\mu) X_n(\mu').$$

In deducing this equation we have supposed that $r_{\max} < h$. The solution of the equation (1) can be obtained by means of development of the unknown function ζ into a power series in the parameter λ:

$$\zeta = \zeta_1 \lambda + \zeta_2 \lambda^2 + \ldots + \zeta_n \lambda^n + \ldots \qquad (2)$$

For the coefficients $\zeta_n(\mu)$ we obtain a system of integral equations of the first kind (28). In order to afford a possibility to solve these equations we introduce restrictions concerning the growth of the coefficients b_n assuming that

$$|b_n| < N q^n,$$

where $q < \frac{A}{h} < 1$.

Under these assumptions this system of equations is solved and for each of the coefficients ζ_n we obtain a series in Legendre's polynomials.

In the last Art. of the paper we show that the series (2) converges for small λ and represents the solution of the problem. Thus we have the following result:

If in the plane $z=0$ a function is given which can be represented by a series of the form $\sum b_n \mu^n X_n(\mu)$ with coefficients satisfying the inequality $|b_n| < Nq^n$, $q < \frac{A}{h}$, then it is possible to find a homogeneous body, situated below the plane $z=0$, of unit density, symmetrical with respect to the axis OZ, and differing but little from a sphere of radius A and centre at the point $(0, 0, -h)$, the Newtonian potential of which takes at the points of the plane $z=0$ prescribed values. This solution of the problem is unique [6].

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

Е. Д. СОЛОМЕНЦЕВ

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе рассматриваются различные классы субгармонических функций, определяемые при помощи понятия выпуклой функции.

§ 1

И. И. Приваловым была рассмотрена ([5, 3, 6]) задача о существовании предельных значений субгармонической функции любого числа переменных и, в связи с этим, была построена теория различных классов таких функций. Эта классификация может быть сделана более гибкой, если, применяя методы, использованные в указанных работах И. И. Привалова, ввести в рассмотрение понятие выпуклой функции.

Заметим два легко доказываемых неравенства

$$\lambda\left[\frac{1}{\operatorname{mes} E}\int_E f(x)\,dx\right] \leqslant \frac{1}{\operatorname{mes} E}\int_E \lambda\,[f(x)]\,dx \quad (\operatorname{mes} E > 0) \tag{1}$$

и

$$\lambda\left[\int_E f(x)\,q(x)\,dx\right] \leqslant \int_E \lambda\,[f(x)]\,q(x)\,dx \qquad \left(\int_E q(x)\,dx = 1,\ q(x) \geqslant 0\right), \tag{2}$$

где $\lambda(x)$ — выпуклая функция ([1]).

Эти неравенства верны и для многомерных интегралов. С другой стороны, считая $\lambda(x)$ неубывающей функцией, отметим легко проверяемые неравенства

$$\lambda^+(x) - C \leqslant \lambda(x^+) \leqslant \lambda^+(x) + C,\ (C > 0), \tag{3}$$

где положено

$$\begin{aligned}
&\lambda^+(x) = \lambda(x), && \text{если} \quad \lambda(x) \geqslant 0,\\
&\lambda^+(x) = 0, && \text{если} \quad \lambda(x) < 0,\\
&\lambda(x^+) = \lambda(x), && \text{если} \quad x \geqslant 0,\\
&\lambda(x^+) = \lambda(0), && \text{если} \quad x < 0.
\end{aligned}$$

В этих неравенствах C — постоянное, не зависящее от x.

§ 2

Во всем дальнейшем будем понимать под $u(P)=u(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})$ функцию, субгармоническую внутри шара с центром в начале координат, радиуса единица, пространства p $(p \geqslant 2)$ измерений. Рассмотрим определяемый следующим условием класс субгармонических функций

$$\int \lambda\left[u^+(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})\right] d\omega < K \qquad (r<1), \tag{A_λ}$$

где интеграл берется по единичной сфере, $\lambda(x)$ — функция выпуклая неубывающая при $0 \leqslant x < +\infty$, отличная от постоянной. При этих условиях $\lambda(x)$ не может быть ограниченной в интервале $0 \leqslant x < +\infty$.

Если, сохраняя выпуклость и возрастание функции $\lambda(x)$, продолжить ее на интервал $-\infty < x < +\infty$, то условие (A_λ) можно заменить следующим:

$$\int \left|\lambda\left[u(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})\right]\right| d\omega < K \qquad (r<1). \tag{A'_λ}$$

В самом деле, так как $\lambda[u(P)]$ функция субгармоническая, то условие (A'_λ) эквивалентно следующему (²):

$$\int \lambda^+\left[u(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})\right] d\omega < K \qquad (r<1). \tag{A''_λ}$$

Положив $x=u(P)$ и применяя неравенства (3), покажем, что в свою очередь условие (A''_λ) эквивалентно (A_λ).

Если $\lambda_1(x)$, начиная с некоторого $x>0$, делается и остается больше $\lambda_2(x)$, то класс A_{λ_1} содержится в классе A_{λ_2}. Это следует из неравенства

$$\lambda_2(x^+) \leqslant \lambda_1[x^+] + \lambda_1[a] - \lambda_1[0],$$

где a — то число, начиная с которого $\lambda_1(x) \geqslant \lambda_2(x)$. Если, начиная с некоторого $x>0$, $\lambda_1(x) \geqslant \lambda_2(x)$ и

$$\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} < M \qquad (M>0), \tag{4}$$

то классы A_{λ_1} и A_{λ_2} совпадают. Достаточно доказать, что класс A_{λ_2} содержится в A_{λ_1}. Это следует из неравенств

$$\lambda_1[x^+] \leqslant \lambda_1[x^{+N}] \leqslant M\lambda_2[x^{+N}]$$

и

$$\lambda_2[x^{+N}] \leqslant \lambda_2[x^+] + \lambda_2[N] - \lambda_2(0),$$

где

$$\lambda[x^{+N}] = \lambda(x), \quad \text{если} \quad x \geqslant N,$$
$$\lambda[x^{+N}] = \lambda(N), \quad \text{если} \quad x < N$$

и N — число, начиная с которого имеет место (4). Из неравенства (1) и того условия, что $\lambda(x) \neq \mathrm{const}$, следует, что всякий класс A_λ содержится в классе A_1, т. е. в классе, определяемом условием

$$\int u^+(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})\, d\omega < K \qquad (r<1). \tag{5}$$

Как известно, функции класса A_1 имеют предельные радиальные значения почти всюду на сфере, которые образуют суммируемую функцию.

Функция $\lambda[u^+(P)] - \lambda(0)$ будет субгармонической, принадлежащей классу A_1, и следовательно, $u(P)$, функция класса A_λ, имеет радиальные предельные значения почти всюду на сфере, которые суммируемы вместе с $\lambda[u^+(1, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]$.

Из субгармоничности $\lambda[u^+(P)]$ следует (3), что условие (A_λ) может быть заменено следующим:

$$\lim_{r\to 1} \int \lambda[u^+(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]\, d\omega = K < +\infty. \qquad (A_\lambda^{(3)})$$

Найдем теперь аналитическое представление, характеризующее функции класса A_λ. Известно (2), что всякая функция класса A_1, следовательно, и A_λ, представима в виде

$$u(P) = -\int G(P; Q)\, d\mu(Q) + h(P),$$

где $-\int G(P; Q)\, d\mu(Q)$ — потенциал Грина, а $h(P)$ — наилучшая гармоническая мажоранта функции $u(P)$ в единичном шаре. Обратно, из этого представления вытекает, что $h(P)$ наилучшая гармоническая мажоранта функции $u(P)$.

Таким образом задача об аналитическом представлении субгармонической функции класса A_λ приводится к изучению аналитического представления ее наилучшей гармонической мажоранты.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы субгармоническая функция принадлежала классу* A_λ, *необходимо и достаточно, чтобы ее наилучшая гармоническая мажоранта принадлежала тому же классу* *.

Пусть $h(P)$ — наилучшая мажоранта для $u(P)$. Достаточность следует из того, что $h^+(P) \geqslant u^+(P)$.

Докажем необходимость. По определению наилучшей гармонической мажоранты (2, 3) имеем:

$$h(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1}) = \lim_{R\to 1} h(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1}; R),$$

где

$$h(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1}; R) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int u(R, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{(R^2 - r^2) R^{p-2}}{(R^2 - 2Rr\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}}\, d\omega \quad (r < R < 1). \qquad (6)$$

Здесь и в дальнейшем γ — угол между векторами $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OQ}$ ($P = P(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})$ и $Q = Q(R, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$).

$$\int \lambda[h^+(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]\, d\omega' = \int \lim_{R\to 1} \lambda[h^+(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1}; R)]\, d\omega'.$$

---

* Ср. И. И. Привалов (3, 6).

Согласно лемме Фату ([4]), применимой к функции $\lambda[h^+]-\lambda(0)$,

$$\int \lambda[h^+(r,\theta_1,\ldots,\theta_{p-1})]\,d\omega' \leqslant \varliminf_{R\to 1}\int \lambda[h^+(r,\theta_1,\ldots,\theta_{p-1};R)]\,d\omega'. \quad (7)$$

Из (6) имеем

$$h^+(r,\theta_1,\ldots,\theta_{p-1};R)\leqslant$$
$$\leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int u^+(R,\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1})\frac{(R^2-r^2)R^{p-2}}{(R^2-2Rr\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\omega. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получим

$$\int \lambda[h^+(r,\theta_1,\ldots,\theta_{p-1})]\,d\omega' \leqslant$$
$$\leqslant \varliminf_{R\to 1}\int \lambda\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int u^+(R,\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1})\frac{(R^2-r^2)R^{p-2}}{(R^2-2Rr\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\omega\right\}d\omega'.$$

Наконец, вспоминая, что

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int \frac{(R^2-r^2)R^{p-2}}{(R^2-2Rr\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\omega=1,$$

применяем неравенство (2) и, меняя порядок интегрирования, получаем окончательный результат:

$$\int \lambda[h^+(r,\theta_1,\ldots,\theta_{p-1})]\,d\omega' \leqslant \varliminf_{R\to 1}\int \lambda[u^+(R,\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1})]\,d\omega.$$

Последний предел конечен согласно условию $(A_\lambda^{(3)})$. Итак, основная теорема доказана.

Если $\lambda(x)$ таково, что, начиная с некоторого x,

$$\frac{\lambda(x)}{x}<M \qquad (M>0), \quad (9)$$

то, по доказанному, класс A_λ совпадает с классом A_1. Известно ([5]), что гармоническая функция класса A_1 вполне характеризуется представлением в виде интеграла Пуассона-Стильтьеса общего вида:

$$h(r,\theta_1,\ldots,\theta_{p-1})=$$
$$=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int h(1,\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1})\frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\omega+$$
$$+\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\psi(e),$$

где $\psi(e)=\psi_1(e)-\psi_2(e)$ есть разность двух неотрицательных аддитивных неубывающих и непрерывных снизу функций ψ_1 и ψ_2 открытого множе-

ства e с производной, равной нулю почти всюду. Иначе, $h(P)$ характеризуется разложимостью на разность двух неотрицательных гармонических функций

$$h(P)=h_1(P)-h_2(P),$$

причем за $h_1(P)$ можно взять наилучшую гармоническую мажоранту для $h^+(P)$.

Если $\lambda(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\lambda(x)}{x}=\infty, \tag{10}$$

то справедлива следующая теорема единственности *:

Если гармоническая функция $h(P)$ удовлетворяет условию

$$\int \lambda[|h(r,\theta_1,\ldots,\theta_{p-1})|]\,d\omega<K \qquad (r<1) \tag{11}$$

и на сфере имеет радиальные предельные значения, почти всюду равные нулю, то $h(P)$ есть тождественный нуль.

В самом деле, для фиксированной точки $P=P(r,\theta_1,\ldots,\theta_{p-1})$,

$$h(P)=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int h(R,\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1})\frac{(R^2-r^2)R^{p-2}}{(R^2-2Rr\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\omega \quad (r<R<1),$$

или

$$h(P)=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int_E+\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int_{C(E)},$$

где E и $C(E)$ — измеримые множества на единичной сфере, причем $C(E)$ есть дополнение E по отношению ко всей сфере. Из последней формулы находим

$$|h(P)|\leqslant\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\cdot\int_E|h(R,\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1})|\frac{(R^2-r^2)R^{p-2}}{(R^2-2Rr\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\omega+$$

$$+\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\int_{C(E)}|h(R,\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1})|\frac{(R^2-r^2)R^{p-2}}{(R^2-2Rr\cos\gamma+r^2)^{\frac{p}{2}}}\,d\omega.$$

Оценивая интегралы, имеем

$$|h(P)|\leqslant\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}}\cdot\frac{(1+r)}{(R-r)^{p-1}}\left\{\int_E|h(R,\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1})|\,d\omega+\right.$$

$$\left.+\int_{C(E)}|h(R,\alpha_1,\ldots,\alpha_{p-1})|\,d\omega\right\}.$$

* Ср. И. И. Привалов ([3]).

Применяя неравенство (1), получим

$$\int\limits_{C(E)} |h(R, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})| \, d\omega \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{mes} C(E) \cdot \lambda^{-1} \left\{ \frac{1}{\operatorname{mes} C(E)} \int\limits_{C(E)} \lambda [\, |h(R, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})| \,] \, d\omega \right\},$$

где $\lambda^{-1}(x)$ — функция, обратная $\lambda(x)$, т. е.

$$\lambda^{-1}[\lambda(x)] = x.$$

Применяя условие (11), окончательно получим:

$$|h(P)| \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \cdot \frac{1+r}{(R-r)^{p-1}} \left\{ \int\limits_E |h(R, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})| \, d\omega + \right.$$

$$\left. + \operatorname{mes} C(E) \cdot \lambda^{-1} \left[\frac{K}{\operatorname{mes} C(E)} \right] \right\}.$$

Легко видеть, что условие (10) равносильно следующему:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\lambda^{-1}(x)}{x} = 0.$$

Выбирая теперь, с помощью теоремы Д. Ф. Егорова, множество E так, чтобы $\operatorname{mes} C(E)$ была достаточно мала, а на E $h(P)$ равномерно стремилась к нулю, и затем выбирая R достаточно близким к единице, докажем наше утверждение.

Докажем, что если $\lambda(x)$ удовлетворяет условию (10), то класс A_λ вполне характеризуется тем, что наилучшая гармоническая мажоранта представима интегралом Пуассона-Стильтьеса частного вида:

$$h(P) = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int u(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} \, d\omega -$$

$$- \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} \, d\psi_2(e),$$

где $\psi_2(e)$ — неотрицательная неубывающая аддитивная функция множества e с производной, почти всюду равной нулю, и, кроме того, $\lambda[u^+(1, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]$ есть суммируемая функция. Покажем сначала, что функция, удовлетворяющая этим условиям, принадлежит классу A_λ. В самом деле

$$h^+(P) \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int u^+(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} \, d\omega.$$

Применяя неравенство (2), получим

$$\lambda[h^+(P)] \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \lambda[u^+(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})] \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\omega,$$

откуда следует доказываемое утверждение.

Обратно, пусть

$$\int \lambda[h^+(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]\, d\omega < K \qquad (r < 1).$$

Тогда гармоническую функцию $h(P)$ можно представить в виде разности двух неотрицательных гармонических функций

$$h(P) = h_1(P) - h_2(P),$$

где $h_1(P)$ — наилучшая гармоническая мажоранта субгармонической функции $h^+(P)$. По доказанной выше основной теореме

$$\int \lambda[h_1(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]\, d\omega < K \quad (r < 1).$$

Из этого следует, что $h_1(P)$ представима интегралом Пуассона от граничной функции $h_1(Q) = h^+(Q)$, причем $\lambda[h^+(Q)]$ суммируема.

Последние заключения сделаны на основании доказанной теоремы единственности, примененной к положительной функции

$$h'(P) = h_1(P) - \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int h^+(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\omega,$$

принадлежащей классу A_λ.

Итак, функция класса A_λ характеризуется представимостью в следующем виде:

$$u(P) = -\int G(P; Q)\, d\mu(Q) + \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int u(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\omega - \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}} d\psi_2(e), \qquad (12)$$

где $-\int G(P; Q)\, d\mu(Q)$ — потенциал Грина и $\psi_2(e)$ — неотрицательная аддитивная неубывающая функция множества e с производной, почти всюду равной нулю, а $u(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})$ вместе с $\lambda[u^+(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})]$ суммируема.

Полагая здесь $\lambda(x) = x^q$ $(q > 1)$, мы получим классы, рассмотренные И. И. Приваловым ([6]).

§ 3

Рассмотрим класс B_λ субгармонических функций таких, что интеграл

$$\int_e \lambda\,[u^+(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]\, d\omega \qquad (r < 1)$$

есть равномерно абсолютно непрерывная функция измеримого множества e на единичной сфере. Очевидно, класс B_λ содержится в классе A_λ. Если $\lambda(x)$ удовлетворяет условию (9), то, как раньше, докажем, что класс B_λ совпадает с классом B_1, т. е. с классом, определяемым условием: интеграл

$$\int_e u^+(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})\, d\omega$$

есть равномерно абсолютно непрерывная функция множества e. Этот класс был изучен в работе И. И. Привалова ([3]).

Если же $\lambda(x)$ удовлетворяет условию (10), то докажем, что класс B_λ совпадает с классом A_λ. Достаточно доказать ([3]), что если $u(P)$ принадлежит классу A_λ, то

$$\lim_{r\to1} \int \lambda\,[u^+(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]\, d\omega = \int \lambda\,[u^+(1, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]\, d\omega,$$

ибо $\lambda[u^+] - \lambda(0)$ есть неотрицательная субгармоническая функция.

Согласно лемме Фату имеем

$$\lim_{r\to1} \int \lambda\,[u^+(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]\, d\omega \geqslant \int \lambda\,[u^+(1, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]\, d\omega.$$

С другой стороны, из (12) получаем

$$u^+(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1}) \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int u^+(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}}\, d\omega.$$

Отсюда

$$\lim_{r\to1} \int \lambda\,[u^+(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]\, d\omega' \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{r\to1} \int \lambda \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int u^+(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}}\, d\omega \right\} d\omega'.$$

Наконец, применяя неравенство (2) и меняя порядок интегрирования, получим

$$\lim_{r\to1} \int \lambda\,[u^+(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]\, d\omega \leqslant \int \lambda\,[u^+(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})]\, d\omega,$$

что и требовалось доказать.

Полагая здесь $\lambda(x) = x^q$ $(q > 1)$, мы получим классы B_q, рассмотренные И. И. Приваловым ([3]).

§ 4

Рассмотрим еще класс C_λ субгармонических функций таких, что интеграл

$$\int_e |\lambda[u(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]|\, d\omega$$

есть равномерно абсолютно непрерывная функция множества e.

Здесь $\lambda(x)$ должно предположить функцией, определенной для всех значений x и неубывающей.

По терминологии И. И. Привалова ([3]), субгармоническая функция $\lambda[u(P)]$ принадлежит классу C. Следовательно ([3]), для того чтобы $u(P)$ принадлежала классу C_λ, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\lim_{r\to 1} \int |\lambda[u(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]|\, d\omega = \int |\lambda[u(1, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]|\, d\omega.$$

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы субгармоническая функция $u(P)$ принадлежала классу C_λ, необходимо и достаточно, чтобы ее наилучшая гармоническая мажоранта принадлежала тому же классу.*

Обозначим наилучшие гармонические мажоранты функций $u(P)$, $\lambda[u(P)]$ и $\lambda[h(P)]$ соответственно через $h(P)$, $H(P)$ и $H_1(P)$.

Очевидно, $H_1(P) \geqslant H(P)$. Докажем, что $H_1(P) \equiv H(P)$.

Достаточно доказать, что

$$H_1(0) \leqslant H(0).$$

По определению $H_1(P)$ имеем

$$H_1(0) = \lim_{R\to 1} H_1(0; R) = \lim_{R\to 1} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \lambda[h(R, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]\, d\omega.$$

По определению $h(P)$

$$\lambda[h(R, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})] = \lim_{R_1\to 1} \lambda[h(R, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1}; R_1)] \quad (R_1 > R).$$

Подставляя, получим

$$H_1(0) = \lim_{R\to 1} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \lim_{R_1\to 1} \lambda \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \times \right.$$

$$\left. \times \int u(R_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \frac{(R_1^2 - R^2) R_1^{p-2}}{(R_1^2 - 2R_1 R \cos\gamma + R^2)^{\frac{p}{2}}}\, d\omega \right\} d\omega'.$$

Наконец, применяем неравенство (2) ко второму интегралу написанного равенства и окончательно получаем

$$H_1(0) \leq \lim_{R\to 1} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \lim_{R_1\to 1} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \times \right.$$

$$\left. \times \int \lambda\left[u(R_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})\right] \frac{(R_1^2 - R^2)\, R_1^{p-2}}{(R_1^2 - 2R_1 R\cos\gamma + R^2)^{\frac{p}{2}}}\, d\omega \right\} d\omega' =$$

$$= \lim_{R\to 1} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \lim_{R_1\to 1} H(R, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1}; R_1)\, d\omega' = H(0).$$

Итак, наилучшая мажоранта для $\lambda[u(P)]$ есть в то же время и наилучшая мажоранта для $\lambda[h(P)]$.

Известно ([3]), что для того, чтобы субгармоническая функция принадлежала классу C, необходимо и достаточно, чтобы ее наилучшая гармоническая мажоранта принадлежала тому же классу. Принадлежность же функций $u(P)$ и $h(P)$ классу C_λ эквивалентна принадлежности функций $\lambda[u(P)]$ и $\lambda[h(P)]$ классу C.

Теорема доказана.

§ 5

Пусть $\varphi(x)$—возрастающая вогнутая функция. Функция $\varphi^{-1}(x)$, определяемая соотношением $\varphi^{-1}[\varphi(x)] = x$, будет выпуклой. Будем называть функцию $u(P)$ φ-субгармонической, если функция $\varphi[u(P)]$ субгармоническая. Из соотношения

$$u(P) = \varphi^{-1}[\varphi[u(P)]]$$

видно, что $u(P)$ будет тогда заведомо субгармонической. Если неубывающая функция $\lambda(x)$ выпукла относительно $\varphi(x)$, т. е. если $\lambda[\varphi^{-1}(x)]$ — функция выпуклая, то $\lambda[u(P)]$—функция субгармоническая (здесь и в дальнейшем $u(P)$ обозначает φ-субгармоническую функцию). Это видно из соотношения

$$\lambda[u(P)] = \lambda[\varphi^{-1}\{\varphi[u(P)]\}].$$

Будем понимать под $\lambda(x)$ выпуклую относительно $\varphi(x)$ неубывающую функцию. Рассмотрим класс H_λ φ-субгармонических функций, определяемый условием

$$\int \lambda^{+}[u(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]\, d\omega < K. \qquad (H_\lambda)$$

Заменяя в неравенствах (3) λ через $\lambda[\varphi^{-1}]$, а x через $\varphi[u]$, обнаружим, что условие (H_λ) эквивалентно следующему:

$$\int \lambda[\varphi^{-1}\{\varphi^{+}[u(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]\}]\, d\omega < K. \qquad (H_\lambda')$$

Если, начиная с некоторого x, $\lambda_1(x) \geqslant \lambda_2(x)$, то класс H_{λ_1} содержится в классе H_{λ_2}. Если, начиная с некоторого x, $\lambda_1(x) \geqslant \lambda_2(x)$ и

$$\frac{\lambda_1(x)}{\lambda_2(x)} < M \quad (M > 0),$$

то классы H_{λ_1} и H_{λ_2} совпадают.

Из условия (H'_λ) видно, что утверждение «функция $u(P)$ принадлежит классу H_λ» эквивалентно утверждению: «функция $\varphi[u(P)]$ принадлежит классу $A_{\lambda[\varphi^{-1}]}$».

Если $\lambda(x)$, при всех достаточно больших x, удовлетворяет условию

$$\frac{\lambda[\varphi^{-1}(x)]}{x} < K \text{ или, иначе, } \frac{\lambda(x)}{\varphi(x)} < K, \tag{13}$$

то класс $A_{\lambda[\varphi^{-1}]}$ совпадает с классом A_1, а это означает, что функция $u(P)$ рассматриваемого класса H_λ такова, что $\varphi[u(P)]$ принадлежит A_1. Обратно, если $\varphi[u(P)]$ принадлежит классу A_1, то $u(P)$ принадлежит классу H_λ. Следовательно, этот класс H_λ характеризуется представимостью в виде *

$$u(P) = \varphi^{-1}\left\{-\int G(P; Q)\, d\mu(Q) + \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}}\, d\psi(e)\right\},$$

где $\psi(e) = \psi_1(e) - \psi_2(e)$ есть разность двух неотрицательных аддитивных неубывающих функций ψ_1 и ψ_2.

Если $\lambda(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\lambda[\varphi^{-1}(x)]}{x} = +\infty \text{ или, иначе, } \lim_{x\to+\infty} \frac{\lambda(x)}{\varphi(x)} = +\infty, \tag{14}$$

то класс H_λ характеризуется суммируемостью граничных значений $\lambda[u(1, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]$ и $\varphi[u(1, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]$ и представимостью в виде

$$u(P) = \varphi^{-1}\left\{-\int G(P; Q)\, d\mu(Q) + \right.$$

$$+ \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \varphi[u(1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1})] \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}}\, d\omega -$$

$$\left. - \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{2\pi^{\frac{p}{2}}} \int \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\gamma + r^2)^{\frac{p}{2}}}\, d\psi(e)\right\},$$

где $\psi(e)$ — неотрицательная аддитивная неубывающая функция множества e с производной, равной нулю почти всюду.

В этом случае класс H_λ может быть охарактеризован еще иначе. Именно, для того чтобы функция $u(P)$ принадлежала классу H_λ, необходимо и достаточно, чтобы интеграл

$$\int_e \lambda^+[u(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]\, d\omega \quad (r < 1)$$

---

* Ср. класс A_1.

был равномерно абсолютно непрерывной функцией множества e. Очевидно, что условие это достаточно. Обратно, если $u(P)$ принадлежит классу H_λ, то $\varphi[u(P)]$ принадлежит $A_{\lambda[\varphi^{-1}]}$ и значит, $B_{\lambda[\varphi^{-1}]}$. Воспользовавшись неравенствами (3), в которых λ заменим на $\lambda[\varphi^{-1}]$, а x на $\varphi[u]$, убедимся в справедливости утверждения.

Как и при рассмотрении классов B_λ и C_λ, усматриваем, что условие (H_λ) эквивалентно, если $\lambda(x)$ удовлетворяет (14), следующему условию граничного характера:

$$\lim_{r\to 1}\int \lambda^+[u(r, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]\, d\omega = \int \lambda^+[u(1, \theta_1, \ldots, \theta_{p-1})]\, d\omega.$$

Московский гос. университет.

Поступило
31.V.1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hardy G., Littlewood J. and Polya G., Inequalities, Cambridge 1934.

[2] Привалов И. И., Субгармонические функции, Москва 1937.

[3] Привалов И. И., Различные классы субгармонических функций в связи с их аналитическими представлениями, Изв. Акад. Наук СССР, Матем. серия, № 2, 1938.

[4] Валле-Пуссен Ш. Ж., Курс анализа бесконечно малых. т. 2, русск. перев., 1933.

[5] Привалов И. И., Граничные задачи теории гармонических и субгармонических функций в пространстве, Матем. сб. 3 (45) : 1, 1938.

[6] Привалов И. И., Об одном классе субгармонических функций в связи с его аналитическим представлением, Изв. Акад. Наук СССР, Матем. серия, № 3, 1938.

E. SOLOMENTSEV. ON SOME CLASSES OF SUBHARMONIC FUNCTIONS

SUMMARY

In his papers ([5,3,6]) I. Privaloff considered the problem of existence of the boundary values of a subharmonic function of any number of variables, and using the solution of this problem he gave a theory of some classes of these functions. In the present paper I. Privaloff's classification is given a more general form by using the conception of convex functions. The methods applied are those, which were used by I. Privaloff in his papers referred to above.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

А. В. ГЕЛЬФАНД

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком **С. Н. Бернштейном***)*

Работа дает обобщение известного метода акад. С. А. Чаплыгина для приближенного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

§ 1. Обобщенная теорема С. А. Чаплыгина

В основании разработанного акад. С. А. Чаплыгиным метода [1] приближенного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, решенных относительно производных и удовлетворяющих указанным ниже условиям, лежит следующая теорема, которая является обобщением теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах:

Пусть нам даны непрерывные вместе со своими производными функции y_{i1}, для которых имеют место неравенства

$$y'_{i1} \geqslant f_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (*)$$

и которые удовлетворяют начальным условиям $x = x_0$, $y_i = y_i^0$; пусть также функции f_i непрерывны, и пусть существуют непрерывные производные

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

причем

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k} > 0.$$

Тогда для всех $x > x_0$ области выполнения условий теоремы значения рассматриваемых нами функций y_{i1} будут не меньше, чем соответствующие значения интегралов одной системы дифференциальных уравнений

$$y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

удовлетворяющих тем же начальным условиям.

Хотя мы могли бы доказать эту теорему сразу в полном объеме, но для наглядности докажем ее отдельно для случая, когда в (*)

невозможен знак равенства (I), и отдельно для случая, когда в (*) возможен знак равенства (II).

I. Дано:

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$
$$y_{i1}' > f_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}),$$

где f_i, y_{i1}' — непрерывные функции,

$$y_{i1}(x_0) = y_i(x_0);$$

$\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ существуют, непрерывны и больше нуля.

Требуется доказать, что $y_{i1} > y_i$ для $x > x_0$ той области, в которой выполняются условия теоремы.

Доказательство. Согласно теореме о среднем значении имеем:

$$y_i(x_0 + \Delta x_0) = y_i(x_0) + \Delta x_0 y_i'(x_0 + h_1),$$
$$\Delta x_0 > 0$$
$$y_{i1}(x_0 + \Delta x_0) = y_{i1}(x_0) + \Delta x_0 y_{i1}'(x_0 + h_2).$$

Так как по условию $y_{i1}'(x_0) > y_i'(x_0)$, то мы можем так подобрать интервал Δx_0, что будет иметь место неравенство

$$y_{i1}'(x_0 + h_1) > y_i'(x_0 + h_2),$$

причем $0 \leqslant h_1 \leqslant \Delta x_0$, $0 \leqslant h_2 \leqslant \Delta x_0$.

В связи с непрерывностью функции y_{i1} во всем первом интервале $(x_0 - x_0 + \Delta x_0)$ имеем $y_{i1} > y_i$.

Далее заметим, что если в какой-либо точке (или интервале) будут выполняться соотношения $y_{i1} > y_i$, то при данных условиях теоремы в каждой такой точке (или интервале) имеем выполнение соотношений

$$y_{i1}' > y_i';$$

Действительно, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k} > 0 \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

согласно условию, мы в каждой точке (или интервале), где $y_{i1} > y_i$, имеем соотношения

$$y_{i1}' > f_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) \geqslant f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_i'.$$

Отсюда следует, что $y_{i1}' > y_i'$.

Перейдем теперь к доказательству теоремы для $x > x_0$, находящихся во всей области выполнения условий теоремы.

Обозначая $x_0 + \Delta x_0 = x_1$ и применяя снова теорему о среднем значении, имеем:

$$y_i(x_1 + \Delta x_1) = y_i(x_1) + \Delta x_1 y_i'(x_1 + h_1'),$$
$$\Delta x_1 > 0$$
$$y_{i1}(x_1 + \Delta x_1) = y_{i1}(x_1) + \Delta x_1 y_{i1}'(x_1 + h_2').$$

Так как согласно доказанному $y'_{i1}(x_1) > y'_i(x_1)$, мы можем так подобрать интервал Δx_1, что будет иметь место неравенство

$$y'_{i1}(x_1 + h'_1) > y'_i(x_1 + h'_2),$$

причем $0 \leqslant h'_1 \leqslant \Delta x_1$, $0 \leqslant h'_2 \leqslant \Delta x_1$.

Отсюда непосредственно следует, что

$$y_{i1}(x_1 + \Delta x_1) > y_i(x_1 + \Delta x_1).$$

Во всем интервале $x_1 + \Delta x_1 = x_2$ в связи с непрерывностью функции y_{i1} имеют место соотношения $y_{i1} > y_i$, которые можно без изменений расширить на другие интервалы. В результате этих операций мы получаем следующую монотонно возрастающую последовательность

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < \ldots$$

Так как область выполнения условий теоремы ограничена, то будет существовать предел полученной монотонной последовательности, т. е. будем иметь

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \bar{x}.$$

Далее, нетрудно проверить, что нарушение зависимости $y_{i1} > y_i$ не может произойти в той области, где выполняются условия теоремы. Этим самым полностью доказана обобщенная теорема С. А. Чаплыгина для неравенства в строгом смысле.

II. Дано:

$$y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$
$$y'_{i1} \geqslant f_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}),$$

y'_{i1}, f_i — непрерывные функции,

$y_{i1}(x_0) = y_i(x_0)$;

$\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ существуют, непрерывны и больше нуля.

Требуется доказать, что $y_{i1} \geqslant y_i$ для $x > x_0$ области, в которой выполняются условия теоремы.

Доказательство. Так как y_{i1} известные функции, то мы можем систему неравенств $y'_{i1} \geqslant f_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1})$ заменить системой уравнений

$$y'_{i1} = f_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) + p_i(x),$$

где $p_i(x) \geqslant 0$ и непрерывны.

Построим новую систему дифференциальных уравнений

$$y'^{m}_{i1} = f_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) + p_i(x) + \varepsilon_{im}(x),$$

где

$$\varepsilon_{im}(x) > 0, \quad \varepsilon_{im} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0, \quad y^m_{i1}(x_0) = y_i(x_0).$$

На основании уже доказанного в п. I для каждой точки области выполнения условий теоремы имеем соотношения

$$y^m_{i1} > y_i \quad (i, m = 1, 2, \ldots, n).$$

Кроме того, известно (2), что $y_{i1}^m \to y_{i1}$, если $\varepsilon_{im} \to 0$ при $m \to \infty$. Отсюда непосредственно получаем, что $y_{i1} \geqslant y_i$ для $x > x_0$ той области, где выполняются условия теоремы.

Аналогично мы можем получить доказательство нашей теоремы для случая минорант.

Приведем доказательство существования майорант (или минорант) интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений при удовлетворении указанных выше условий.

Сконструируем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, решенных относительно производных:

$$y'_{i1} = f_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) + M_i(x - x_0).$$

При $M_i > 0$ и $x > x_0$ будем иметь зависимости

$$y'_{i1} = f_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) + M(x - x_0) > f_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}). \qquad \text{(a)}$$

При выполнении условий теоремы проблема существования майорант (или минорант) искомых интегральных кривых заданной системы дифференциальных уравнений сводится к проблеме существования интегралов системы (a), а последнее, при вышеуказанных условиях, является очевидным.

§ 2. Построение серии аппроксимирующих кривых

На основании только что доказанного положения мы, при выполнении всех условий теоремы, получаем возможность построения системы кривых $y_{11}, y_{21}, y_{31}, \ldots, y_{n1}$, аппроксимирующих искомые интегральные кривые, причем вышеотмеченные аппроксимации внутри области, где выполняются условия теоремы, везде будут представлять собой соответственно майоранты (или миноранты) искомых интегральных кривых заданной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теперь перед нами стоит, во-первых, задача построения серии систем аппроксимирующих кривых, проходящих через начальную точку и все более тесно приближающихся к искомым интегральным кривым, а во-вторых, задача оценки сходимости этого бесконечного процесса.

Для дальнейшего потребуем выполнения соотношений

$$\sum_{k,\,l=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_k \partial y_l} \Delta y_k \, \Delta y_l = Q_i < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{(b)}$$

и построим следующую систему функций

$$\varphi_i(x, y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{n2}) = f_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_{k1}} (y_{k2} - y_{k1}),$$

причем $y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}$ — уже найденная система майорант * искомой системы интегральных кривых, а $y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{n2}$ — неизвестные функции.

* В случае если бы нами наперед была найдена система минорант искомой системы интегральных кривых, мы должны были бы потребовать выполнения соотношений $Q_i > 0$. Заметим, что значения Q_i берутся для соответствующих промежуточных значений аргументов.

Построим теперь следующую систему дифференциальных уравнений:

$$y'_{i2} = \varphi_i(x, y_{12}, \ldots, y_{n2}) = A_i(x) + \sum_{k=1}^{n} B_{ik}(x) y_{k2},$$

линейную относительно переменных $y_{12}, y_{22}, y_{32}, \ldots, y_{n2}$, и будем искать интегралы этой системы при условии выполнения соотношений

$$y_{i2}(x_0) = y_i(x_0).$$

Покажем, что в данном случае будет иметь место выполнение соотношений $y_{i1} > y_{i2} > y_i$ для всех $x > x_0$ той области, где имеют место условия теоремы.

Действительно, согласно теореме о среднем значении и принятому условию (b), имеем:

$$f_i(x, y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{n2}) = f_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_{k1}} (y_{k2} - y_{k1}) + Q_i, \quad (1)$$

причем $Q_i < 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Согласно произведенному построению имеем

$$\varphi_i(x, y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{n2}) = f_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_{k1}} (y_{k2} - y_{k1}). \quad (2)$$

Сопоставляя (1) и (2), получаем

$$f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \leqslant \varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \quad (3)$$

Из соотношений (1) и (3) получаем следующие зависимости:

$$y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \leqslant \varphi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad (4)$$

$$y'_{i1} \geqslant f_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) = \varphi_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}). \quad (5)$$

Из соотношений (4) и (5) получаем

$$y_i < y_{i2} < y_{i1}.$$

Приняв за начальную аппроксимирующую систему майорант y_{i2}, можно теперь при указанных выше условиях и допущениях построить таким же методом новую систему майорант y_{i3}, которые еще больше приближаются к соответствующим искомым интегральным кривым. Мы получаем таким методом бесконечную последовательность систем функций, причем каждая из этих систем соответственно все более тесно примыкает сверху к соответствующей интегральной кривой. Так как каждая из этих последовательностей ограничена снизу соответственно искомыми интегральными кривыми, то существуют пределы каждой последовательности.

Мы имеем соотношения

$$y_{i1} > y_{i2} > y_{i3} > \ldots > y_{in} > \ldots > y_i \text{ и } \lim_{n \to \infty} y_{in} = \overline{y}_i.$$

В дальнейшем покажем, что $\overline{y}_i = y_i$.

§ 3. Сходимость и оценка сходимости приближений

Пусть нам дана удовлетворяющая условиям теоремы система дифференциальных уравнений

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \tag{6}$$

и пусть интегралы этой системы удовлетворяют, например, следующим начальным условиям:

$$y_i(x_0) = 0.$$

Допустим, что

$$y_i = y_{i1} + a_{i1}(x), \tag{7}$$

причем y_{i1} — миноранты системы интегральных кривых, $a_{i1}(x) \geqslant 0$ — соответствующие погрешности.

Подставляя значения (7) в данную систему (6) и применяя к уравнениям системы (6) теорему о среднем значении, получаем:

$$y_i' = y_{i1}' + a_{i1}' = f_i(x, y_{11} + a_{11}, y_{21} + a_{21}, \ldots, y_{n1} + a_{n1}) + f_i(x, y_{11}, \ldots, y_{n1}) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_{k1}} a_{k1} + Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Для оценки погрешностей $a_{i1}(x)$ разобьем их следующим образом:

$$a_{i1}(x) = b_i(x) + a_{i2}(x),$$

причем для ясности мы с самого начала будем рассматривать величины $a_{i2}(x)$ как новые остатки, а суммы $y_{i1}(x) + b_i(x)$ как новые приближения. Это возможно, так как имеем очевидные соотношения

$$y_i = (y_{i1} + b_i) + a_{i2}; \tag{9}$$

при этом допускаем $b_i(x_0) = 0$.

Отсюда следует, что $a_{i2}(x_0) = 0$.

Подставляя значения (9) в соотношения (8), получаем:

$$a_{i2}' = \left\{ - \left[y_{i1}' - f_i(x, y_{11}, \ldots, y_{n1}) \right] + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_{k1}} b_k(x) - b_i' \right\} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_{k1}} a_{k2} + Q_i. \tag{10}$$

Следуя идее, положенной в основание способа С. А. Чаплыгина построения серии аппроксимирующих кривых по методу касательных, возьмем $b_k(x)$ такими, чтобы выражения в фигурных скобках системы (10) равнялись нулю.

Обозначая $y_{i1} - f_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) = \varphi_i(x)$, мы получаем

$$b_i' = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_{k1}} b_k(x) - \varphi_i(x), \tag{11}$$

причем $\varphi_i(x) \leqslant 0$.

Вследствие того что

$$b_k(x_0)=0, \text{ а } \frac{\partial f_i}{\partial y_{k1}}>0,$$

из доказанной в § 1 теоремы следует, что $b_i(x)$ имеют в области выполнения условий этой теоремы положительную величину для $x>0$ *.

На основании соотношений (11) получаем теперь следующую систему дифференциальных уравнений:

$$a'_{i2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial y_{k1}}a_{k2}+Q_i. \tag{12}$$

Обозначая максимум $\frac{\partial f_i}{\partial y_{k1}}$ через K и заменяя Q_i максимальным значением ** D, мы, согласно обобщенной теореме С. А. Чаплыгина, получаем, что непрерывные вместе с их производными функции a_i, которые являются интегралами системы

$$a'_i=K\sum_{k=1}^{n}a_k+D \tag{13}$$

и которые проходят через ту же начальную точку, будут являться майорантами интегральных кривых системы (12).

Из самого характера уравнений (13) следует, что эта система может быть заменена одним уравнением

$$a'(x)=Na(x)+D,$$

где $N=nK$.

---

* Можно доказать, что полученная нами система приближений

$$y_{i2}(x)=y_{i1}(x)+b_i(x)$$

совпадает с той системой, которая была сконструирована нами раньше.

Действительно, имеем

$$y'_{i2}=y'_{i1}+b'_i=f_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1})+\varphi_i(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial y_{k1}}b_k(x)-\varphi_i(x)=$$

$$=f_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1})+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial y_{k1}}b_k(x).$$

** D — квадратичная форма, которая получилась из квадратичных форм

$$Q_i=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial y_{k1}\partial y_{l1}}a_{k1}(x)a_{l1}(x)$$

путем замены в этих формах коэффициентов

$$\sum_{l,k=1}^{n}\frac{\partial^2 f_i}{\partial y_{k1}\partial y_{l1}}$$

наибольшим из них, который обозначаем через A.

Интегралом этого уравнения является выражение

$$a(x) = e^{\int_0^x N d\alpha} \int_0^x e^{-\int_0^t N d\alpha} D\,dt,$$

откуда следует, что

$$a_{i2} < \int_0^x e^{\int_t^x N d\alpha} D\,dt. \tag{14}$$

В связи с тем, что рассмотренный нами процесс имеет повторяющийся итерационный характер, мы аналогичным путем можем получить зависимости *

$$a_{i,n+1} < \int_0^x e^{\int_t^x N d\alpha} D_n\,dt, \tag{15}$$

где

$$D_n = A \sum_{k,\,l=1}^{n} a_{kn}\, a_{ln}.$$

Оценку быстроты сходимости приближений проведем по формуле (15). Это даст нам оценку быстроты сходимости ряда

$$y_{i1} + b_i + b_{i1} + \dots,$$

или оценку быстроты сходимости систем последовательностей приближений $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}, \dots$ к системе интегральных кривых y_i. Если допустить, что первоначальные приближения y_{i1} выбраны такими, что для первых остатков имеют место неравенства

$$a_{i1}(x) < \varepsilon,$$

то из неравенства (15), на основании вышеупомянутого исследования, получим, что

$$a_{i,n+1}(x) < \frac{1}{2^{2^n}}.$$

Это значит, что погрешность $a_{i,n+1}(x)$ стремится к нулю быстрее, чем член любой геометрической прогрессии, или даже чем член $\frac{1}{n!}$ **.

* См. соответствующее исследование в работе акад. Н. Н. Лузина [3].

** Г. Максудов в своих работах [4, 5] обобщает метод акад. С. А. Чаплыгина для приближенного интегрирования дифференциальных уравнений высших порядков, особо останавливаясь на нахождении приближений для уравнений 2-го порядка. В нашей работе, накладывая более узкие условия для основной теоремы, мы установили область применимости и доказали сходимость процесса приближений, обобщая метод акад. С. А. Чаплыгина для приближенного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

§ 4. Практическое применение теории приближенного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений

При сравнении условий обобщенной теоремы С. А. Чаплыгина с условиями основной теоремы, доказанной акад. С. А. Чаплыгиным (1) для одного дифференциального уравнения, решенного относительно производной, мы видим, что в обобщенную теорему входит дополнительное условие $\frac{\partial f_i}{\partial y_k} > 0$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, которого не было в основной теореме, но которое является существенным при том методе, который применен для доказательства этой теоремы.

Кроме того, легко показать, что эти условия существенны для обобщенной теоремы С. А. Чаплыгина.

С этой целью рассмотрим систему двух уравнений

$$\begin{cases} y' = 2z^2 + 2y, \\ z' = 4y + 2z^2 + 2x^2 + 1. \end{cases}$$

Интегралами этой системы являются функции

$$y = -x^2 + x - \frac{1}{2}, \quad z = x - 1.$$

Легко видеть, что функции $y_1 = x^2 - \frac{1}{2}$, $z_1 = -1$ удовлетворяют в интервале $(0 - 1)$ неравенствам

$$\begin{aligned} y_1' &< 2z_1^2 + 2y_1, \\ z_1' &< 4y_1 + 2z_1^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

Имеем следующие условия:

$$y_1(0) = y(0); \quad z_1(0) = z(0),$$

f_1, f_2, y_1', z_1' — непрерывные функции,

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = 2 > 0, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 4z < 0,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = 4 > 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z} = 4z < 0.$$

Мы видим, что в данном случае выполняются все условия обобщенной теоремы С. А. Чаплыгина за исключением условия $\frac{\partial f_i}{\partial y_k} > 0$.

Непосредственным вычислением легко убедиться, что в данном случае в интервале $\left(\frac{1}{2} - 1\right)$ будет $y_1 > y$, а это значит, что обобщенная теорема С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах становится неверной.

Тем не менее в отдельных частных случаях путем определенных подстановок удается показать несущественность условия $\frac{\partial f_i}{\partial y_k} > 0$ для правильности обобщенной теоремы С. А. Чаплыгина. В настоящей работе мы этих частных случаев рассматривать не будем; приведем лишь

результат, который заключается в том, что если последнее условие обобщенной теоремы С. А. Чаплыгина заменить следующим (для случая системы двух уравнений):

$$\frac{\partial f_1}{\partial z} > 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} > 0,$$

то при выполнении всех иных условий обобщенная теорема остается правильной. Применим вышеизложенную теорию для решения примера.

Пример. Дана удовлетворяющая условиям обобщенной теоремы С. А. Чаплыгина система:

$$\begin{cases} y' = -y^2 + z + x^2 - 19x + 94, \\ z' = \quad y - z^2 + x^2 - \ \ 9x + 14, \end{cases}$$

интегралы которой суть $y = 10 - x$; $z = 5 - x$.

Путем непосредственной подстановки легко убедиться, что при значениях $y_1 = 10$, $z_1 = 5$, для которых имеют место зависимости $y_1(0) = y(0)$; $z_1(0) = z(0)$, в интервале $(0 - 1)$ будут выполняться неравенства:

$$y_1' > -100 + 5 + x^2 - 19x + 94,$$
$$z_1' > 10 - 25 + x^2 - 9x + 14.$$

Как видно, в данном случае выполнены все условия обобщенной теоремы С. А. Чаплыгина; что же касается, в частности, последнего условия этой теоремы, то в данном случае

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} < 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} > 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} > 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} < 0,$$

а согласно сказанному такого рода невыполнения последнего условия являются несущественными.

Функции * $y_1 = 10$; $z_1 = 5$ в интервале $(0 - 1)$ являются, таким образом, майорантами заданной системы дифференциальных уравнений.

Так как в нашем случае $Q_i < 0$, $(i = 1, 2)$, то мы получаем возможность находить более близкие аппроксимации интегральных кривых y_2, z_2, которые будут также майорантами системы.

Строим следующую линейную относительно y_2, z_2 систему дифференциальных уравнений:

$$y_2' = f_1(x, y_1, z_1) + \frac{\partial f_1}{\partial y_1'}(y_2 - y_1) + \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(z_2 - z_1),$$

$$z_2' = f_2(x, y_1, z_1) + \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(y_2 - y_1) + \frac{\partial f_2}{\partial z_1}(z_2 - z_1),$$

причем y_2, z_2 должны удовлетворять зависимостям:

$$y_2(0) = y(0), \ z_2(0) = z(0).$$

---

* Мы взяли в качестве первых приближений константы. Если бы в качестве первых приближений мы взяли не константы, то, как легко видеть, для получения иных приближений мы получили бы систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

После соответствующих подстановок и упрощений получаем следующую систему:

$$y_2' = -20y_2 + z_2 + x^2 - 19x + 194,$$
$$z_2' = y_2 - 10z_2 + x^2 - 9x + 39.$$

Решая ее обыкновенными методами, получаем:

$$y_2 = 0.099C_1e^{-9.901x} - 10.099C_2e^{-20.099x} + \frac{11}{199}x^2 - \frac{39\,863}{39\,601}x + \frac{78\,809\,472}{7\,880\,599},$$
$$z_2 = C_1e^{-9.901x} + C_2e^{-20.099x} + \frac{21}{199}x^2 - \frac{40\,463}{39\,601}x + \frac{39\,420\,497}{7\,880\,599}.$$

Из условия $y_2(0) = y_1(0)$; $z_2(0) = z_1(0)$ получаем возможность вычислить константы C_1 и C_2:

$$C_1 = -0.0022; \quad C_2 = 0.000022.$$

При помощи непосредственного вычисления находим

$$y_2(1) = 9.105, \qquad z_2(1) = 4.0915,$$
$$y_1(1) = 10, \qquad z_1(1) = 5,$$
$$y\ (1) = 9, \qquad z\ (1) = 4.$$

Мы видим, что вторые приближения уже дают в точке $x = 1$ погрешность порядка $2 - 3\%$ по отношению к искомой величине.

Физико-математический институт
Академии Наук БССР.

Поступило
4.XII.1937.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чаплыгин С. А., акад., Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, Труды ЦАГИ, № 130, 1932.

[2] Де-ла Валле-Пуссен Ш. Ж., Курс анализа бесконечно малых, ГТТИ, 1933, ч. II, стр. 206—212.

[3] Лузин Н. Н., акад., О методе приближенного интегрирования акад. С. А. Чаплыгина, Труды ЦАГИ, 1932, стр. 25—27.

[4] Максудов Г., Распространение способа акад. С. А. Чаплыгина по приближенному интегрированию дифференциальных уравнений 1-го порядка на уравнения выше 1-го порядка, Известия Физико-матем. об-ва при Казанском университете им. В. И. Ленина, т. VI, серия 3, 1932—33.

[5] Максудов Г., Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений по способу акад. С. А. Чаплыгина, Ученые записки Казанского гос. университета им. В. И. Ленина, т. 94, книга 7, вып. 2, стр. 53—96.

A. GELFAND. INTÉGRATION APPOROCHÉE DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES DU PREMIER ORDRE

RÉSUMÉ

La méthode de S. Tchapliguine pour intégrer les systèmes d'équations différentielles ordinaires du premier ordre résolues par rapport aux dérivées et vérifiant les conditions indiquées dans la suite a pour base le théorème suivant qui est une généralisation du théorème de S. Tchapliguine sur les inégalités différentielles:

Soient y_{i1} des fonctions continues ainsi que leurs dérivées et vérifiant les inégalités

$$y'_{i1} \geqslant f_i(x, y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et les conditions initiales $x = x_0$, $y_i = y_i^0$; soient d'ailleurs f_i des fonctions continues et telles que les dérivées

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \quad (i, \ k = 1, 2, \ldots, n)$$

sont continues et vérifient les inégalités

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \quad 0.$$

Alors pour chaque $x > x_0$ du domaine où les conditions du théorème sont vérifiées, les valeurs des fonctions y_{i1} considérées seront au moins égales aux valeurs correspondantes des intégrales du système donné d'équations différentielles

$$y'_i = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

vérifiant les mêmes conditions initiales.

En nous appuyant sur ce théorème nous pouvons démontrer l'existence des courbes très importantes dans notre recherche, possédant des propriétés déterminées et que nous avons appelées majorantes et minorantes des courbes intégrales que l'on cherche.

En passant ensuite à la construction d'une suite de courbes approchées nous observons qu'il est nécessaire d'imposer au système donné d'équations différentielles la condition supplémentaire suivante: les expressions

$$\sum_{k, l=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_k \partial y_l} \Delta y_k \Delta y_l = Q_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

doivent avoir un signe constant dans tout le domaine où les conditions du théorème généralisé de Tchapliguine sont vérifiées. La construction même de la suite des courbes qui deviennent de plus en plus proches aux courbes intégrales correspondantes est effectuée au moyen d'une méthode qui, par analogie avec celle de Tchapliguine, peut être appelée méthode des tangentes.

Nous démontrons ensuite que les suites obtenues des courbes approchées qui s'approchent de plus en plus aux courbes intégrales cherchées convergent très vite car $|y_{in} - y_i|$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ est une quantité qui ne surpasse pas $\frac{1}{2^{2^n}}$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

М. М. АРТЮХОВ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ АЛГОРИФМА ЯКОБИ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Вводится обобщение алгорифма Якоби, дающее возможность найти необходимое и достаточное условие линейной зависимости единицы и трех данных иррациональных чисел.

§ 1. Обозначения

Для вещественного числа α будем обозначать наибольшее целое число, в нем содержащееся, посредством $[\alpha]$, его дробную часть $\{\alpha\}$, расстояние до ближайшего целого числа (α) и ближайшее к нему целое $[\alpha)$ (в случае, если α отстоит одинаково от двух целых чисел, $[\alpha)$ будет обозначать у нас то из этих чисел, абсолютная величина которого меньше).

Условимся говорить, что числа $1, \alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(n)}$ (или, короче, числа $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(n)}$) линейно зависимы, если существуют целые рациональные числа $A, A', A'', \ldots, A^{(n)}$, не равные нулю одновременно и такие, что $A + A'\alpha' + \ldots + A^{(n)}\alpha^{(n)} = 0$.

§ 2. Введение

При разложении в непрерывную дробь некоторого числа α' мы получаем цепь равенств

$$\alpha' = q'_1 + \frac{1}{\alpha'_1}, \; \alpha' = q'_2 + \frac{1}{\alpha'_2}, \; \ldots; \; \alpha'_{k-1} = q'_k + \frac{1}{\alpha'_k}, \; \ldots$$

где $q'_k = [\alpha'_{k-1}]$.

Известно, что если нет такого k, при котором $q'_k = \alpha'_{k-1}$, то процесс разложения оказывается бесконечным и число α' в таком случае иррационально. Если же при некотором k $q'_k = \alpha'_{k-1}$, то разложение обрывается, и в этом случае α' число рациональное. Следовательно, необходимым и достаточным условием линейной зависимости чисел $1, \alpha'$ является нарушимость алгорифма непрерывных дробей, примененного к числу α'.

Для случая двух чисел α', α'' имеется возможность установить точно такое же условие линейной зависимости чисел $1, \alpha', \alpha''$ с по-

мощью обобщения алгорифма непрерывных дробей, данного Якоби ([1]). Для трех чисел α', α'', α''' алгорифм Якоби к такой теореме не приводит, однако некоторое его обобщение эту задачу разрешает. В настоящей работе мы как раз и показываем, как это достигается. Однако предварительно мы даем простой вывод необходимого условия линейной зависимости между числами α', α'' с помощью обычного алгорифма Якоби и, кроме того, с помощью алгорифма Якоби, «идущего по ближайшим целым».

Далее мы считаем нелишним показать, что нарушимость как обычного, так и «идущего по ближайшим целым» алгорифмов Якоби третьего порядка, примененных к α', α'', α''', не является необходимым условием для линейной зависимости этих чисел.

§ 3. Алгорифм Якоби

Пусть заданы n вещественных чисел α', α'', ... , $\alpha^{(n)}$, причем α' число нецелое. Первым шагом алгорифма Якоби n-го порядка можно считать получение из заданных n чисел новых n чисел α_1', α_1'', ... , $\alpha_1^{(n)}$ по формулам

$$\alpha'=q_1'+\frac{1}{\alpha_1^{(n)}},\ \alpha''=q_1''+\frac{\alpha_1'}{\alpha_1^{(n)}},\ \ldots,\ \alpha^{(n)}=q_1^{(n)}+\frac{\alpha_1^{(n-1)}}{\alpha_1^{(n)}},$$

где

$$q_1'=[\alpha'],\ q_1''=[\alpha''],\ \ldots,\ q_1^{(n)}=[\alpha^{(n)}],$$

причем $q_1'\neq\alpha'$.

При $[\alpha_1']\neq\alpha_1'$ тем же приемом из чисел α_1', α_1'', ... , $\alpha_1^{(n)}$ получаются числа α_2', α_2'', ... , $\alpha_2^{(n)}$ и т. д. Вообще, если числа α_{k-1}', α_{k-1}'', ... , $\alpha_{k-1}^{(n)}$ уже получены, то k-ый шаг алгорифма характеризуется формулами

$$\alpha_{k-1}'=q_k'+\frac{1}{\alpha_k^{(n)}},\ \alpha_{k-1}''=q_k''+\frac{\alpha_k'}{\alpha_k^{(n)}},\ \ldots,\ \alpha_{k-1}^{(n)}=q_k^{(n)}+\frac{\alpha_k^{(n-1)}}{\alpha_k^{(n)}},\tag{1}$$

где

$$q_k'=[\alpha_{k-1}'],\quad q_k''=[\alpha_{k-1}''],\ \ldots,\ q_k^{(n)}=[\alpha_{k-1}^{(n)}],$$

и вполне определяет числа α_k', α_k'', ... , $\alpha_k^{(n)}$, если только $q_k'\neq\alpha_{k-1}'$. Если же $q_k'=\alpha_{k-1}'$, то это значит, что алгорифм на k-ом шагу нарушается, так как при этом формулы (1) делаются непригодными для определения чисел α_k', α_k'', ... , $\alpha_k^{(n)}$.

Оказывается, что нарушение алгорифма Якоби n-го порядка является условием, достаточным для того, чтобы числа, к которым он применен, были линейно зависимы. Мы не останавливаемся на доказательстве этого утверждения, так как его можно найти доказанным (причем в более общей формулировке) в работе Перрона ([2]). Вообще мы считаем возможным не вдаваться в элементы теории алгорифма Якоби, с одной стороны, потому что они с достаточной полнотой освещены в упомянутой работе Перрона, с другой стороны, потому что для наших целей не понадобится знать об алгорифме ничего, кроме изложенного выше.

§ 4. О нарушении алгорифма Якоби 2-го порядка

Как уже было сказано, нарушение алгорифма Якоби свидетельствует о линейной зависимости тех чисел, к которым он применен, поэтому здесь мы докажем лишь, что нарушение алгорифма Якоби 2-го порядка, примененного к числам α', α'', является условием, необходимым для того, чтобы числа эти были линейно зависимы.

ТЕОРЕМА I. *Если между числами α', α'', $\alpha' \geqslant 0$, $\alpha'' > 1$ имеет место зависимость*

$$A + A'\alpha' + A''\alpha'' = 0,$$

где A, A', A'' целые и $\max(|A|, |A'|, |A''|) = M_0 > 0$, то примененный к α', α'' алгорифм Якоби нарушится на k-ом шагу, причем $k \leqslant m = 3M_0$.

Доказательство. Чтобы доказать это утверждение, допустим противное: что алгорифм остается ненарушенным до m-го шага включительно. В таком случае имеют место формулы

$$\alpha'_{k-1} = q'_k + \frac{1}{\alpha''_k}, \quad \alpha''_{k-1} = q''_k + \frac{\alpha'_k}{\alpha''_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{2}$$

и значит существует последовательность пар чисел

$$q'_1, q''_1;\ q'_2, q''_2;\ \ldots;\ q'_m, q''_m;\ q'_{m+1} = [\alpha'_m],\ q''_{m+1} = [\alpha''_m].$$

Из этой последовательности и из входящих в условие теоремы чисел A, A', A'' образуем последовательность чисел

$$A, A', A'', A''', \ldots, A^{(m+3)} \tag{3}$$

по следующему закону:

$$A^{(k+2)} = A^{(k-1)} + A^{(k)}q'_k + A^{(k+1)}q''_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m+1. \tag{4}$$

Установим два соотношения между числами образованной нами последовательности. Во-первых, заметим, что

$$A^{(k+1)}\alpha'_k + A^{(k+2)}\alpha''_k = -A^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, m. \tag{5}$$

В самом деле, для $k = 0$ (5) имеет место по условию теоремы. Кроме того, если (5) справедливо для некоторого $k < m$, то в силу формул (2) и (4) из

$$A^{(k+1)}\left(q'_{k+1} + \frac{1}{\alpha''_{k+1}}\right) + A^{(k+2)}\left(q''_{k+1} + \frac{\alpha'_{k+1}}{\alpha''_{k+1}}\right) + A^{(k)} = 0,$$

т. е.

$$A^{(k+2)}\alpha'_{k+1} + (A^k + A^{(k+1)}q'_{k+1} + A^{(k+2)}q''_{k+1})\alpha''_{k+1} = -A^{(k+1)},$$

следует справедливость (5) и для $k+1$.

Во-вторых, из (4) и (5)

$$A^{(k+2)} = A^{(k+2)} - (A^{(k-1)} + A^{(k)}\alpha'_k + A^{(k+1)}\alpha''_k) = -A^{(k)}\{\alpha'_{k-1}\} - A^{(k+1)}\{\alpha''_{k-1}\},$$

т. е.

$$|A^{(k+2)}| = |A^k\{\alpha'_{k-1}\} + A^{(k+1)}\{\alpha''_{k-1}\}|. \tag{6}$$

Соотношения (5) и (6) позволяют нам заключить о существовании следующего неравенства:

$$|A^{(k+2)}| < \max(|A^{(k-1)}|, |A^{(k)}|, |A^{(k+1)}|). \tag{7}$$

Действительно, прежде всего мы замечаем, что два соседних числа $A^{(k)}$ и $A^{(k+1)}$ последовательности (3) одновременно равными нулю быть не могут, так как в силу равенств (5) должны были бы равняться нулю все три числа A, A', A'', чего по условию нет. Далее, если числа $A^{(k)}$ и $A^{(k+1)}$ противоположных знаков, то из (6) мы получим

$$|A^{(k+2)}| \leqslant \max(|A^{(k)}\{\alpha'_{k-1}\}|, |A^{(k+1)}\{\alpha''_{k-1}\}|),$$

и так как дробная часть всегда меньше единицы, то

$$|A^{(k+2)}| < \max(|A^{(k)}|, |A^{(k+1)}|).$$

Допустим, наконец, что $A^{(k)}$ и $A^{(k+1)}$ имеют один и тот же знак или одно из этих чисел равно нулю. Устанавливая с помощью формул (2), что всегда

$$\alpha'_{k-1} \geqslant 0, \ \alpha''_{k-1} > 1,$$

мы имеем здесь

$$|A^{(k)}\{\alpha'_{k-1}\} + A^{(k+1)}\{\alpha''_{k-1}\}| \leqslant |A^{(k)}\alpha'_{k-1} + A^{(k+1)}\alpha''_{k-1}|, \tag{8}$$

причем равенство в (8) возможно лишь, если $\alpha'_{k-1} < 1$ и $A^{(k+1)} = 0$. Но тогда $A^{(k)} \neq 0$ и, приняв во внимание (6), мы получим

$$|A^{(k+2)}| < |A^{(k)}|.$$

Если же $A^{(k+1)} \neq 0$, то из неравенства (8) в соединении с (5) и (6) вытекает

$$|A^{(k+2)}| < |A^{(k-1)}|.$$

Таким образом неравенство (7) оказывается доказанным вполне.

Положим теперь

$$\max(|A^{(3i)}|, |A^{(3i+1)}|, |A^{(3i+2)}|) = M_i, \quad i = 0, 1, \ldots, M_0$$
$$\text{и} \quad M_{M_0+1} = |A^{(m+3)}|.$$

Из неравенства (7) мы заключаем, что

$$\max(|A^{(3i)}|, |A^{(3i+1)}|, |A^{(3i+2)}|) > |A^{(3i+3)}|,$$
$$\max(|A^{(3i+1)}|, |A^{(3i+2)}|, |A^{(3i+3)}|) > |A^{(3i+4)}|,$$
$$\max(|A^{(3i+2)}|, |A^{(3i+3)}|, |A^{(3i+4)}|) > |A^{(3i+5)}|.$$

а следовательно

$$M_i > M_{i+1}, \quad i = 0, 1, \ldots, M_0.$$

Итак, предположив, что алгорифм не нарушается до m-го шага включительно, мы должны притти к выводу, что существует последовательность целых неотрицательных чисел $M_0, M_1, \ldots, M_{M_0+1}$, удовлетворяющих цепи неравенств

$$M_0 > M_1 > \ldots > M_{M_0} > M_{M_0+1}.$$

Это невозможно, так как количество этих чисел M_0+2, тогда как наибольшее из них равно M_0. Значит, теорема доказана.

Мы считаем уместным показать здесь, что, пользуясь не обычным алгорифмом Якоби, а «идущим по ближайшим целым», можно установить более низкую границу для шага, нарушающего алгорифм.

§ 5. О нарушении «идущего по ближайшим целым» алгорифма Якоби 2-го порядка

Идущим по ближайшим целым алгорифмом Якоби 2-го порядка мы называем алгорифм, k-ый шаг которого определяется формулами

$$\alpha'_{k-1} = q'_k + \frac{1}{\alpha''_k}, \quad \alpha''_{k-1} = q''_k + \frac{\alpha'_k}{\alpha''_k},$$

где

$$q'_k = [\alpha'_{k-1}), \quad q''_k = [\alpha''_{k-1}).$$

Так же как и для обычного алгорифма Якоби, нарушение идущего по ближайшим целым алгорифма происходит на k-ом шагу, если $q'_k = \alpha'_{k-1}$; и так же можно показать, что нарушение идущего по ближайшим целым алгорифма, примененного к α', α'', свидетельствует о линейной зависимости этих чисел. Покажем, что линейная зависимость чисел α', α'' влечет за собой нарушимость алгорифма.

ТЕОРЕМА II. *Если между вещественными числами α', α'' имеет место зависимость*

$$A + A'\alpha' + A''\alpha'' = 0, \quad A,\ A',\ A'' - \text{целые}$$

и

$$\max(|A'|,\ |A''|) = M_0 > 0,$$

то примененный к ним алгорифм Якоби, идущий по ближайшим целым, нарушится на k-ом шагу, причем

$$k \leqslant m = 2M_0 + 2.$$

Доказательство. Допустив, что алгорифм не нарушится до m-го шага включительно, по числам $q'_1, q''_1;\ q'_2, q''_2; \ldots;\ q'_m, q''_m$, которые в таком случае должны существовать, и по числам A, A', A'' строим так же, как в теореме I, последовательность чисел

$$A', A'', A''', \ldots, A^{(m+1)}.$$

Так же, как и там, никакие два соседних числа $A^{(k)}$ и $A^{(k+1)}$ нулю одновременно не равны, что вытекает из имеющего место и здесь равенства (5).

Взамен соотношения (6) здесь мы используем равенство

$$|A^{(k+2)}| = |A^{(k)}(q'_k - \alpha'_{k-1}) + A^{(k+1)}(q''_k - \alpha''_{k-1})|,$$

из которого получим

$$|A^{(k+2)}| \leqslant |A^{(k)}(\alpha'_{k-1})| + |A^{(k+1)}(\alpha''_{k-1})|$$

или

$$|A^{(k+2)}| \leqslant \frac{1}{2}|A^{(k)}| + \frac{1}{2}|A^{(k+1)}|. \tag{9}$$

В (9) равенство допустимо лишь в случаях, если одно из чисел $A^{(k)}$, $A^{(k+1)}$ равно нулю, или если одновременно имеют место равенства

$$(\alpha'_{k-1}) = \frac{1}{2}, \quad (\alpha''_{k-1}) = \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Следовательно, из (9) при отсутствии условия (10) всегда получается неравенство

$$|A^{(k+2)}| < \max(|A^{(k)}|, |A^{(k+1)}|). \tag{11}$$

Условие же (10) означает, что

$$\alpha'_{k-1} = q'_k + \frac{1}{\pm 2}, \quad \alpha''_{k-1} = q''_k + \frac{\pm 1}{\pm 2},$$

т. е.

$$\alpha'_k = \pm 1 \quad \text{и} \quad q'_{k+1} = \alpha'_k,$$

а это по допущенному не должно иметь места для $k = 0, 1, \ldots, m-1$. Значит, неравенство (11) осуществляется при любом $k < m$.

Положим

$$M_i = \max(|A^{(2i+1)}|, |A^{(2i+2)}|), \quad i = 0, 1, \ldots, M_0, \quad \text{и} \quad M_{M_0+1} = |A^{(m+1)}|.$$

Благодаря (11) эти целые неотрицательные числа удовлетворяют условию $M_i > M_{i+1}$ и мы пришли к серии неравенств

$$M_0 > M_1 > \ldots > M_{M_0} > M_{M_0+1},$$

указывающей на невозможность сделанного в начале доказательства допущения.

§ 6. О нарушении алгорифма Якоби 3-го порядка

Перрон в цитированной нами выше работе доказывает, что линейная зависимость между числами $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(n)}$ при $n \geqslant 3$ оказывается условием, недостаточным для того, чтобы алгорифм Якоби n-го порядка, примененный к этим числам, нарушался. Но на самом деле доказательство Перрона справедливо лишь для $n > 3$, а для $n = 3$ содержит ошибку, вкравшуюся в следующее утверждение [(2), стр. 11]: «... seien $b_1, b_2, \ldots, b_n$ positive ganze rationale Zahlen, die den Bedingungen genügen:

$$b_n > 1, \; b_n > b_1, \ldots, b_n > b_{n-1},$$
$$1 - b_1 + b_2 - \ldots + (-1)^n b_n = (-1)^{n+1}.$$

Für $n \geqslant 3$ sind diese stets gleichzeitig erfüllbar (nicht aber für $n = 2$)».

Для $n > 3$ такие числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ действительно существуют, однако для $n = 3$ их нет, так же как и для $n = 2$. Равенство $1 - b_1 + b_2 - b_3 = 1$ при наложенных на b_1, b_2, b_3 условиях невыполнимо.

Все же, отказавшись от этих условий, можно построить примеры (следуя методу Перрона), показывающие, что линейная зависимость между числами $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ не влечет за собой нарушения алгорифма Якоби, примененного к этим числам.

Мы возьмем в качестве α''' корень ρ уравнения

$$x^4 - ax^3 - ax^2 - 1 = 0, \quad a > 0 \text{ целое}, \tag{12}$$

удовлетворяющий условию $a < \rho < a+1$ (такой корень всегда у подобного уравнения имеется).

Далее положим $\alpha' = \rho^3 - a\rho^2 - a\rho$, $\alpha'' = \rho^2 - a\rho$.

Применяя к $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ алгорифм Якоби и используя уравнение (12), мы имеем

$$\alpha' = \rho^3 - a\rho^2 - a\rho = \frac{1}{\rho},$$

$$\alpha'' = \rho^2 - a\rho = \frac{a\rho^2 + 1}{\rho^2} = a + \frac{1}{\rho^2},$$

$$\alpha''' = \rho = \frac{a\rho^3 + a\rho^2 + 1}{\rho^3} = a + \frac{a\rho^2 + 1}{\rho^3},$$

т. е.

$$q_1' = 0, \quad q_1'' = a, \quad q_1''' = a$$

и

$$\alpha_1''' = \rho = \alpha''', \quad \alpha_1' = \frac{1}{\rho} = \rho^3 - a\rho^2 - a\rho = \alpha',$$

$$\alpha_1'' = \frac{a\rho^2 + 1}{\rho^2} = \rho^2 - a\rho = \alpha''.$$

Значит алгорифм Якоби, примененный к построенной тройке чисел $\alpha', \alpha'', \alpha'''$, оказывается ненарушимым, как бы далеко его ни продолжить, так как при любом k мы будем иметь

$$\alpha_k' = \alpha', \quad \alpha_k'' = \alpha'', \quad \alpha_k''' = \alpha'''.$$

Вместе с тем, приняв во внимание, что -1 является корнем уравнения (12), легко установить, что

$$1 - \alpha' + \alpha'' - \alpha''' = 0,$$

т. е. что числа $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ линейно зависимы.

§ 7. О нарушении алгорифма Якоби 3-го порядка, идущего по ближайшим целым

В § 5 было показано, что при линейно зависимых числах α', α'' у алгорифма Якоби 2-го порядка, идущего по ближайшим целым, может быть установлена более низкая граница для шага, нарушающего алгорифм, чем у обычного алгорифма Якоби 2-го порядка. Можно было бы поэтому думать, что, в отличие от обычного алгорифма Якоби 3-го порядка, идущий по ближайшим целым алгорифм того же порядка имеет больше оснований обладать свойством всегда нарушаться, если он применен к линейно зависимым числам $\alpha', \alpha'', \alpha'''$. На самом же

деле оказывается, что у идущего по ближайшим целым алгорифма этого свойства также нет. Построим пример, доказывающий это утверждение.

Корень ρ уравнения

$$x^4 - 2ax^3 - ax^2 + ax - 1 = 0, \quad a > 0 \text{ целое}, \tag{13}$$

заключенный в интервале $2a < \rho < 2a + 1$ (легко видеть, что такой корень имеется), берем в качестве α'''.

Далее полагаем

$$\alpha' = \rho^3 - 2a\rho^2 - a\rho, \quad \alpha'' = \rho^2 - 2a\rho.$$

Первый шаг алгорифма с помощью формул

$$\alpha' = q_1' + \frac{1}{\alpha_1'''}, \quad \alpha'' = q_1'' + \frac{\alpha_1'}{\alpha_1'''}, \quad \alpha''' = q_1''' + \frac{\alpha_1''}{\alpha_1'''}$$

должен привести нас к тройке чисел $\alpha_1', \alpha_1'', \alpha_1'''$.

Вычислим значения q_1', q_1'', q_1''', имея в виду, что они должны быть ближайшими целыми числами к $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ соответственно. В силу уравнения (13) мы имеем

$$\alpha' = \rho^3 - 2a\rho^2 - a\rho = \frac{-a\rho + 1}{\rho} = -a + \frac{1}{\rho},$$

откуда в виду $\frac{1}{\rho} < \frac{1}{2}$ мы заключаем, что $q_1' = -a$.

Далее

$$\alpha'' = \rho^2 - 2a\rho = \frac{a\rho^2 - a\rho + 1}{\rho^2} = a + \frac{-a\rho + 1}{\rho^2},$$

но

$$\left|\frac{-a\rho + 1}{\rho^2}\right| < \frac{a\rho}{\rho^2} < \frac{1}{2},$$

следовательно $q_1'' = a$. Наконец,

$$\alpha''' = \rho = \frac{2a\rho^3 + a\rho^2 - a\rho + 1}{\rho^3} = 2a + \frac{a\rho^2 - a\rho + 1}{\rho^3},$$

и так как

$$\frac{a\rho^2 - a\rho + 1}{\rho^3} < \frac{a\rho^2}{\rho^3} < \frac{1}{2},$$

то $q_1''' = 2a$.

Значит,

$$\alpha_1''' = \rho,$$

$$\alpha_1' = \frac{-a\rho + 1}{\rho} = \rho^3 - 2a\rho^2 - a\rho,$$

$$\alpha_1'' = \frac{a\rho^2 - a\rho + 1}{\rho^2} = \rho^2 - 2a\rho,$$

т. е.

$$\alpha_1' = \alpha', \ \alpha_1'' = \alpha'', \ \alpha_1''' = \alpha'''.$$

Таким образом мы видим, что алгорифм может быть в данном случае продолжен как угодно далеко, потому что для любого $k = 1, 2, \ldots$ мы будем иметь

$$\alpha_k' = \alpha', \quad \alpha_k'' = \alpha'', \quad \alpha_k''' = \alpha'''.$$

Вместе с тем для чисел α', α'', α''' имеет место линейная зависимость вида

$$1+\alpha'+\alpha''+\alpha'''=0,$$

что легко установить, приняв во внимание наличие корня -1 у уравнения (13).

В результате мы заключаем, что ни обычный, ни идущий по ближайшим целым алгорифмы Якоби 3-го порядка не обладают свойством нарушаться всегда, когда числа, к которым они применяются, линейно зависимы. Главной целью настоящей работы как раз и является построение такого по возможности ближайшего обобщения алгорифма Якоби, которое этим свойством обладает.

§ 8. «Разветвленный» алгорифм Якоби

Пусть α', α'', α''' суть некоторые вещественные числа. Мы будем обозначать для краткости всю тройку чисел одним символом (α).

Положим

$$q_0'=[\alpha'],\quad q_0''=[\alpha''],\quad q_0'''=[\alpha'''];$$

$$q_1'=q_0'+1,\quad q_1''=q_0''+1,\quad q_1'''=q_0'''+1$$

и, если $q_0'\neq\alpha'$, то далее,

$$\left.\begin{aligned}\alpha'&=q_0'+\frac{1}{\alpha_0'''},\quad \alpha''=q_0''+\frac{\alpha_0'}{\alpha_0'''},\quad \alpha'''=q_0'''+\frac{\alpha_0''}{\alpha_0'''},\\ \alpha'&=q_1'-\frac{1}{\alpha_1'''},\quad \alpha''=q_1''-\frac{\alpha_1'}{\alpha_1'''},\quad \alpha'''=q_1'''-\frac{\alpha_1''}{\alpha_1'''}.\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

Получение из заданной тройки чисел (α) двух новых троек, α_0', α_0'', α_0''' и α_1', α_1'', α_1''' [коротко, $(\alpha)_0$ и $(\alpha)_1$], по формулам (14) и представляет собою первый шаг «разветвленного» алгорифма Якоби. Если $[\alpha_0']\neq\alpha_0'$ и $[\alpha_1']\neq\alpha_1'$, то, далее, мы полагаем

$$\begin{aligned}\alpha_0'&=q_{00}'+\frac{1}{\alpha_{00}'''},\quad \alpha_0''=q_{00}''+\frac{\alpha_{00}'}{\alpha_{00}'''},\quad \alpha_0'''=q_{00}'''+\frac{\alpha_{00}''}{\alpha_{00}'''},\\ \alpha_0'&=q_{01}'-\frac{1}{\alpha_{01}'''},\quad \alpha_0''=q_{01}''-\frac{\alpha_{01}'}{\alpha_{01}'''},\quad \alpha_0'''=q_{01}'''-\frac{\alpha_{01}''}{\alpha_{01}'''},\\ \alpha_1'&=q_{10}'+\frac{1}{\alpha_{10}'''},\quad \alpha_1''=q_{10}''+\frac{\alpha_{10}'}{\alpha_{10}'''},\quad \alpha_1'''=q_{10}'''+\frac{\alpha_{10}''}{\alpha_{10}'''},\\ \alpha_1'&=q_{11}'-\frac{1}{\alpha_{11}'''},\quad \alpha_1''=q_{11}''-\frac{\alpha_{11}'}{\alpha_{11}'''},\quad \alpha_1'''=q_{11}'''-\frac{\alpha_{11}''}{\alpha_{11}'''},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}q_{00}^{(i)}&=[\alpha_0^{(i)}],\qquad q_{01}^{(i)}=q_{00}^{(i)}+1,\qquad i=1,\ 2,\ 3.\\ q_{10}^{(i)}&=[\alpha_1^{(i)}],\qquad q_{11}^{(i)}=q_{10}^{(i)}+1,\qquad i=1,\ 2,\ 3.\end{aligned}$$

Получение четырех троек чисел $(\alpha)_{00}$, $(\alpha)_{01}$ и $(\alpha)_{10}$, $(\alpha)_{11}$ с помощью этих формул представляет второй шаг разветвленного алгорифма. Каждая пара троек $(\alpha)_{00}$, $(\alpha)_{01}$ и $(\alpha)_{10}$, $(\alpha)_{11}$ порождается здесь одной из троек $(\alpha)_0$, $(\alpha)_1$ тем же способом, каким эти две были порождены исходной тройкой (α).

Если числа α'_{00}, α'_{01}, α'_{10}, α'_{11} все нецелые, то, «раздваивая» каждую из вновь полученных троек с помощью формул вида (14), мы придем к восьми новым тройкам, и т. д.

Этот алгорифм может быть продолжен беспрепятственно до тех пор, пока для некоторого числа k и некоторой последовательности нулей и единиц, $i_1, i_2, \ldots, i_{k-1}$, число $\alpha'_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ не окажется целым. В этом случае мы будем считать алгорифм нарушенным на k-ом шагу, так как вычисление тройки чисел $(\alpha)_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 0}$ указанным выше способом становится невозможным.

Если алгорифм остается ненарушенным до m-го шага включительно, то получение троек $(\alpha)_{i_1 \ldots i_{k-1} 0}$ и $(\alpha)_{i_1 \ldots i_{k-1} 1}$ для любого $k = 1, 2, \ldots, m$ и любой последовательности нулей и единиц, $_1$, $i_2, \ldots, i_{k-1}$, производится с помощью формул

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_{i_1 \ldots i_{k-1}} &= q'_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k} + (-1)^{i_k} \frac{1}{\alpha'''_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k}}, \\ \alpha''_{i_1 \ldots i_{k-1}} &= q''_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k} + (-1)^{i_k} \frac{\alpha'_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k}}{\alpha'''_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k}}, \\ \alpha'''_{i_1 \ldots i_{k-1}} &= q'''_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k} + (-1)^{i_k} \frac{\alpha''_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k}}{\alpha'''_{i_1 \ldots i_{k-1} i_k}}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где

$$q^{(j)}_{i_1 \ldots i_{k-1} 0} = [\alpha'_{i_1 \ldots i_{k-1}}], \quad j = 1, 2, 3,$$
$$q^{(j)}_{i_1 \ldots i_{k-1} 1} = q^{(j)}_{i_1 \ldots i_{k-1} 0} + 1, \quad j = 1, 2, 3.$$

Из (15) непосредственно вытекает, что при $1 \leqslant k \leqslant m$ все числа троек $(\alpha)_{i_1 \ldots i_k}$ неотрицательны, причем $\alpha'''_{i_1 \ldots i_k} > 1$.

Построенный таким образом алгорифм обладает свойством нарушаться тогда и только тогда, когда числа, к которым он применен, линейно зависимы. Доказательство этого предложения мы дадим в виде двух теорем.

ТЕОРЕМА III. *Если примененный к α', α'', α''' разветвленный алгорифм Якоби нарушается, то числа эти линейно зависимы.*

Доказательство. Установим, что если для какого-нибудь k и некоторой последовательности $i_1, i_2, \ldots, i_k$ числа тройки $(\alpha)_{i_1 \ldots i_k}$ линейно зависимы, то числа α', α'', α''' также линейно зависимы. В самом деле, пусть B, B', B'', B''' целые не равные нулю одновременно числа такие, что

$$B + B'\alpha'_{i_1 \ldots i_k} + B''\alpha''_{i_1 \ldots i_k} + B'''\alpha'''_{i_1 \ldots i_k} = 0. \tag{16}$$

Из формул (15) мы заключаем, что

$$\alpha'''_{i_1 \ldots i_k} = \frac{(-1)^{i_k}}{\alpha'_{i_1 \ldots i_{k-1}} - q'_{i_1 \ldots i_k}}, \qquad \alpha'_{i_1 \ldots i_k} = \frac{\alpha''_{i_1 \ldots i_{k-1}} - q''_{i_1 \ldots i_k}}{\alpha'_{i_1 \ldots i_{k-1}} - q'_{i_1 \ldots i_k}},$$

$$\alpha''_{i_1 \ldots i_k} = \frac{\alpha'''_{i_1 \ldots i_{k-1}} - q'''_{i_1 \ldots i_k}}{\alpha'_{i_1 \ldots i_{k-1}} - q'_{i_1 \ldots i_k}}.$$

Значит, равенство (16) влечет за собой

$$B(\alpha'_{i_1 \dots i_{k-1}} - q'_{i_1 \dots i_k}) + B'(\alpha''_{i_1 \dots i_{k-1}} - q''_{i_1 \dots i_k}) + \\ + B''(\alpha'''_{i_1 \dots i_{k-1}} - q'''_{i_1 \dots i_k}) + (-1)^{i_k} B''' = 0$$

или

$$C + B\alpha'_{i_1 \dots i_{k-1}} + B'\alpha''_{i_1 \dots i_{k-1}} + B''\alpha'''_{i_1 \dots i_{k-1}} = 0, \qquad C \text{ — целое.} \qquad (17)$$

Замечая, что в (16) в виду $\alpha'''_{i_1 \dots i_k} \neq 0$ хоть одно из чисел B, B', B'' отлично от нуля, мы можем утверждать, что (17) сведетельствует о линейной зависимости чисел тройки $(\alpha)_{i_1 \dots i_{k-1}}$. Повторяя приведенное рассуждение еще $k-1$ раз, мы заключим и о существовании линейной зависимости чисел α', α'', α'''.

Так как нарушение алгорифма означает, что при некоторой комбинации индексов $i_1, i_2, \dots, i_k$ оказывается $\alpha'_{i_1 \dots i_k} = q'_{i_1 \dots i_k 0}$, т. е. что числа тройки $(\alpha)_{i_1 \dots i_k}$ линейно зависимы, то установленным выше теорема доказана.

Этот простой способ установления линейной зависимости чисел при нарушении примененного к ним (в данном случае разветвленного) алгорифма может быть использован и в тех аналогичных случаях, где мы ссылались ранее на доказательство Перрона.

ТЕОРЕМА IV. *Если для вещественных неотрицательных чисел* α', α'', α''', *из которых* $\alpha''' > 1$, *существуют такие целые* A, A', A'', A''', *что*

$$A + A'\alpha' + A''\alpha'' + A'''\alpha''' = 0$$

и

$$\max(|A|, |A'|, |A''|, |A'''|) = M_0 > 0,$$

то примененный к тройке (α) *алгорифм должен нарушаться на к-ом шагу, и* $k \leqslant m = 4M_0 + 4$.

Доказательство. Для доказательства теоремы мы допустим противное: что алгорифм может быть продолжен ненарушенным до m-го шага включительно. В таком случае, применяя к α', α'', α''' m шагов алгорифма, мы должны получить вполне определенную систему целых чисел

$$q'_{i_1 \dots i_k}, \quad q''_{i_1 \dots i_k}, \quad q'''_{i_1 \dots i_k} \qquad (k = 1, 2, \dots, m, \quad i_f = 0, 1).$$

Построим новую систему чисел

$$A'''_{i_1 \dots i_k} \qquad (k = 1, 2, \dots, m, \ i_j = 0, 1),$$

связанных с числами $q'_{i_1 \dots i_k}$, $q''_{i_1 \dots i_k}$, $q'''_{i_1 \dots i_k}$ и A, A', A'', A''' следующим образом:

$$A'''_0 = A + A'q'_0 + A''q''_0 + A'''q'''_0$$

и

$$A'''_1 = A + A'q'_1 + A''q''_1 + A'''q'''_1,$$

далее

$$A'''_{00} = A_0 + A'_0 q'_{00} + A''_0 q''_{00} + A'''_0 q'''_{00}, \quad A'''_{01} = A_0 + A'_0 q'_{01} + A''_0 q''_{01} + A'''_0 q'''_{01},$$
$$A'''_{10} = A_1 + A'_1 q'_{10} + A''_1 q''_{10} + A'''_1 q'''_{10}, \quad A'''_{11} = A_1 + A'_1 q'_{11} + A''_1 q''_{11} + A'''_1 q'''_{11},$$

где

$$A_0 = A', \quad A_0' = A'', \quad A_0'' = A'''; \quad A_1 = -A', \quad A_1' = -A'', \quad A_1'' = -A'''.$$

Вообще для каждой комбинации $i_1, i_2, \ldots i_k$, $1 \leqslant k \leqslant m$, мы положим

$$A'''_{i_1 \ldots i_k} = A_{i_1 \ldots i_{k-1}} + A'_{i_1 \ldots i_{k-1}} q'_{i_1 \ldots i_k} + A''_{i_1 \ldots i_{k-1}} q''_{i_1 \ldots i_k} + A'''_{i_1 \ldots i_{k-1}} q'''_{i_1 \ldots i_k}, \tag{18}$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_{i_1 \ldots i_{k-1}} = (-1)^{i_{k-1}} A'_{i_1 \ldots i_{k-2}}, \quad A'_{i_1 \ldots i_{k-1}} = (-1)^{i_{k-1}} A''_{i_1 \ldots i_{k-2}}, \\ A''_{i_1 \ldots i_{k-1}} = (-1)^{i_{k-1}} A'''_{i_1 \ldots i_{k-2}}. \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

Для каждой пары чисел $A'''_{i_1 \ldots i_k 0}$ и $A'''_{i_1 \ldots i_k 1}$ мы построим число

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_k} = A_{i_1 \ldots i_k} + A'_{i_1 \ldots i_k} \alpha'_{i_1 \ldots i_k} + A''_{i_1 \ldots i_k} \alpha''_{i_1 \ldots i_k} + A'''_{i_1 \ldots i_k} \alpha'''_{i_1 \ldots i_k}.$$

Установим, что $\varepsilon_{i_1 \ldots i_k} = 0$.

Действительно, заменяя в $\varepsilon_{i_1 \ldots i_k}$ тройку $(\alpha)_{i_1 \ldots i_k}$ тройкой $(\alpha)_{i_1 \ldots i_k i_{k+1}}$ по формулам (15), мы имеем

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_k} = \frac{(-1)^{i_{k+1}} (A'_{i_1 \ldots i_k} + A''_{i_1 \ldots i_k} \alpha'_{i_1 \ldots i_{k+1}} + A'''_{i_1 \ldots i_k} \alpha''_{i_1 \ldots i_{k+1}})}{\alpha'''_{i_1 \ldots i_k i_{k+1}}} +$$
$$+ \frac{(A_{i_1 \ldots i_k} + A'_{i_1 \ldots i_k} q'_{i_1 \ldots i_{k+1}} + A''_{i_1 \ldots i_k} q''_{i_1 \ldots i_{k+1}} + A'''_{i_1 \ldots i_k} q'''_{i_1 \ldots i_{k+1}}) \alpha'''_{i_1 \ldots i_{k+1}}}{\alpha'''_{i_1 \ldots i_k i_{k+1}}},$$

откуда в виду соотношений (18), (19) получаем

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_k} = \frac{\varepsilon_{i_1 \ldots i_{k+1}}}{\alpha'''_{i_1 \ldots i_{k+1}}}. \tag{20}$$

Приняв во внимание условие теоремы

$$\varepsilon = A + A'\alpha' + A''\alpha'' + A'''\alpha''' = 0,$$

из (20) мы и усматриваем, что

$$\varepsilon_{i_1 \ldots i_k} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{21}$$

Это равенство позволяет установить существенную для нас связь между числами $A'_{i_1 \ldots i_k}$, $A''_{i_1 \ldots i_k}$, $A'''_{i_1 \ldots i_k}$ и $A'''_{i_1 \ldots i_k i_{k+1}}$. Именно, из (18) и (21) непосредственно следует

$$A'''_{i_1 \ldots i_k 0} = A'''_{i_1 \ldots i_k 0} - \varepsilon_{i_1 \ldots i_k} = -(A'_{i_1 \ldots i_k} \{\alpha'_{i_1 \ldots i_k}\} + A''_{i_1 \ldots i_k} \{\alpha''_{i_1 \ldots i_k}\} +$$
$$+ A'''_{i_1 \ldots i_k} \{\alpha'''_{i_1 \ldots i_k}\}),$$

$$A'''_{i_1 \ldots i_k 1} = A'''_{i_1 \ldots i_k 1} - \varepsilon_{i_1 \ldots i_k} = A'_{i_1 \ldots i_k} (1 - \{\alpha'_{i_1 \ldots i_k}\}) +$$
$$+ A''_{i_1 \ldots i_k} (1 - \{\alpha''_{i_1 \ldots i_k}\}) + A'''_{i_1 \ldots i_k} (1 - \{\alpha'''_{i_1 \ldots i_k}\})$$

или

$$|A'''_{i_1 \ldots i_{k+1}}| = |A'_{i_1 \ldots i_k} \{(-1)^{i_{k+1}} \alpha'_{i_1 \ldots i_k}\} +$$
$$+ A''_{i_1 \ldots i_k} \{(-1)^{i_{k+1}} \alpha''_{i_1 \ldots i_k}\} + A'''_{i_1 \ldots i_k} \{(-1)^{i_{k+1}} \alpha'''_{i_1 \ldots i_k}\}|. * \tag{22}$$

---

* Символ $\{-\alpha\}$ здесь обозначает не совсем то, что принято называть дробной частью; при α целом неотрицательном у нас $\{-\alpha\} = 1$.

Здесь числа $A'_{i_1 \ldots i_k}$, $A''_{i_1 \ldots i_k}$, $A'''_{i_1 \ldots i_k}$ одновременно быть равными нулю не могут, так как из равенства (21) в этом случае явствовало бы, что и $A_{i_1 \ldots i_k} = 0$, а это в виду (19) означало бы, что

$$A'_{i_1 \ldots i_{k-1}} = A''_{i_1 \ldots i_{k-1}} = A'''_{i_1 \ldots i_{k-1}} = 0,$$

и, продолжая это рассуждение достаточно далеко, мы пришли бы к условию

$$A = A' = A'' = A''' = 0,$$

что противоречит условию теоремы.

Теперь мы перейдем к доказательству основного неравенства для чисел $A^{(j)}_{i_1 \ldots i_k}$,

$$\max(|A_{i_1 \ldots i_k}|, |A'_{i_1 \ldots i_k}|, |A''_{i_1 \ldots i_k}|, |A'''_{i_1 \ldots i_k}|) > \min(|A'''_{i_1 \ldots i_k 0}|, |A'''_{i_1 \ldots i_k 1}|),$$
$$k = 0, 1, \ldots, m-4. \qquad (23)$$

Мы будем различать три возможных соотношения между числами

$$A'_{i_1 \ldots i_k}, \ A''_{i_1 \ldots i_k}, \ A'''_{i_1 \ldots i_k}:$$

I. Все три числа $A'_{i_1 \ldots i_k}$, $A''_{i_1 \ldots i_k}$, $A'''_{i_1 \ldots i_k}$ одного и того же знака.

II. Два из этих чисел имеют общий знак, третье—противоположный.

III. Одно из чисел (или два) равно нулю.

Установим неравенство (23) для каждого из этих случаев отдельно.

I. В этом случае, так как все три числа тройки $(\alpha)_{i_1 \ldots i_k}$ неотрицательны, причем $\alpha'''_{i_1 \ldots i_k} > 1$, используя (21) и (22), мы получим

$$|A'''_{i_1 \ldots i_k 0}| < |A'_{i_1 \ldots i_k} \alpha'_{i_1 \ldots i_k} + A''_{i_1 \ldots i_k} \alpha''_{i_1 \ldots i_k} + A'''_{i_1 \ldots i_k} \alpha'''_{i_1 \ldots i_k}| = |A_{i_1 \ldots i_k}|,$$

т. е. неравенство (23) выполнено.

II. Здесь для определенности мы предположим, что общий знак имеют числа $A'_{i_1 \ldots i_k}$ и $A''_{i_1 \ldots i_k}$, так как другие случаи исследуются почти дословно так же. Тогда из (22) следует

$$|A'''_{i_1 \ldots i_k 0}| \leqslant \max(|A'_{i_1 \ldots i_k}\{\alpha'_{i_1 \ldots i_k}\} + A''_{i_1 \ldots i_k}\{\alpha''_{i_1 \ldots i_k}\}|, |A'''_{i_1 \ldots i_k}\{\alpha'''_{i_1 \ldots i_k}\}|)$$

и

$$|A'''_{i_1 \ldots i_k 1}| < \max(|A'_{i_1 \ldots i_k}\{-\alpha'_{i_1 \ldots i_k}\} + A''_{i_1 \ldots i_k}\{-\alpha''_{i_1 \ldots i_k}\}|,$$
$$|A'''_{i_1 \ldots i_k}\{-\alpha'''_{i_1 \ldots i_k}\}|),$$

причем равенство в первом соотношении возможно лишь в случаях, если

$$\{\alpha'_{i_1 \ldots i_k}\} = \{\alpha''_{i_1 \ldots i_k}\} = 0 \text{ или } \{\alpha'''_{i_1 \ldots i_k}\} = 0.$$

Значит, либо

$$|A'''_{i_1 \ldots i_k 0}| \leqslant |A'''_{i_1 \ldots i_k}\{\alpha'''_{i_1 \ldots i_k}\}| < |A'''_{i_1 \ldots i_k}|,$$

либо

$$|A'''_{i_1 \ldots i_k 1}| < |A'''_{i_1 \ldots i_k}\{-\alpha'''_{i_1 \ldots i_k}\}| \leqslant |A'''_{i_1 \ldots i_k}|,$$

и тем самым неравенство (23) осуществляется, либо, наконец, одновременно и

$$|A'''_{i_1 \ldots i_k 0}| \leqslant |A'_{i_1 \ldots i_k}\{\alpha'_{i_1 \ldots i_k}\} + A''_{i_1 \ldots i_k}\{\alpha''_{i_1 \ldots i_k}\}|$$

и

$$|A'''_{i_1\dots i_k1}| < |A'_{i_1\dots i_k}\left\{-\alpha'_{i_1\dots i_k}\right\} + A''_{i_1\dots i_k}\left\{-\alpha''_{i_1\dots i_k}\right\}|.$$

Но дробные части, имеющиеся в правых частях этих неравенств, связаны зависимостью

$$\left\{\alpha'_{i_1\dots i_k}\right\} + \left\{\alpha''_{i_1\dots i_k}\right\} + \left\{-\alpha'_{i_1\dots i_k}\right\} + \left\{-\alpha''_{i_1\dots i_k}\right\} = 2,$$

а значит, должно иметь место одно из трех условий:

$$\left\{\alpha'_{i_1\dots i_k}\right\} + \left\{\alpha''_{i_1\dots i_k}\right\} < 1, \tag{24}$$

$$\left\{-\alpha'_{i_1\dots i_k}\right\} + \left\{-\alpha''_{i_1\dots i_k}\right\} < 1, \tag{25}$$

$$\left\{\alpha'_{i_1\dots i_k}\right\} + \left\{\alpha''_{i_1\dots i_k}\right\} = \left\{-\alpha'_{i_1\dots i_k}\right\} + \left\{-\alpha''_{i_1\dots i_k}\right\} = 1. \tag{26}$$

При условии (24) мы имеем

$$|A'''_{i_1\dots i_k0}| \leqslant \max(|A'_{i_1\dots i_k}|, |A''_{i_1\dots i_k}|)\cdot(\left\{\alpha'_{i_1\dots i_k}\right\} + \left\{\alpha''_{i_1\dots i_k}\right\}) < \\ < \max(|A'_{i_1\dots i_k}|, |A''_{i_1\dots i_k}|).$$

При (25) или (26)

$$|A'''_{i_1\dots i_k1}| < \max(|A'_{i_1\dots i_k}|, |A''_{i_1\dots i_k}|)\cdot(\left\{-\alpha'_{i_1\dots i_k}\right\} + \left\{-\alpha''_{i_1\dots i_k}\right\}) \leqslant \\ \leqslant \max(|A'_{i_1\dots i_k}|, |A''_{i_1\dots i_k}|).$$

Значит, снова неравенство (23) выполняется.

III. Предположим, что нулю равно число $A'''_{i_1\dots i_k}$, так как две другие возможности требуют только части приводимых здесь рассуждений. Тогда равенство (22) будет иметь вид

$$|A'''_{i_1\dots i_k i_{k+1}}| = |A'_{i_1\dots i_k}\left\{(-1)^{i_{k+1}}\alpha'_{i_1\dots i_k}\right\} + A''_{i_1\dots i_k}\left\{(-1)^{i_{k+1}}\alpha''_{i_1\dots i_k}\right\}|$$

и следовательно, если $A'_{i_1\dots i_k}$ и $A''_{i_1\dots i_k}$ числа противоположных знаков или одно из них равно нулю, то

$$|A'''_{i_1\dots i_k0}| \leqslant \max(|A'_{i_1\dots i_k}\left\{\alpha'_{i_1\dots i_k}\right\}|, |A''_{i_1\dots i_k}\left\{\alpha''_{i_1\dots i_k}\right\}|) < \\ < \max(|A'_{i_1\dots i_k}|, |A''_{i_1\dots i_k}|)$$

и тем самым неравенство (23) справедливо. Если же $A'_{i_1\dots i_k}$ и $A''_{i_1\dots i_k}$ числа одного знака, то

$$|A'''_{i_1\dots i_k0}| \leqslant \max(|A'_{i_1\dots i_k}|, |A''_{i_1\dots i_k}|)\cdot(\left\{\alpha'_{i_1\dots i_k}\right\} + \left\{\alpha''_{i_1\dots i_k}\right\}), \tag{27}$$

$$|A'''_{i_1\dots i_k1}| \leqslant \max(|A'_{i_1\dots i_k}|, |A''_{i_1\dots i_k}|)\cdot(\left\{-\alpha'_{i_1\dots i_k}\right\} + \left\{-\alpha''_{i_1\dots i_k}\right\}). \tag{28}$$

При наличии условия (24) или (25) справедливость неравенства (23) явствует из (27) или (28) соответственно.

Исследуем теперь случай, отвечающий условию (26). Если в этом случае будет

$$\left\{\alpha'_{i_1\dots i_k}\right\} < \alpha'_{i_1\dots i_k} \quad \text{или} \quad \left\{\alpha''_{i_1\dots i_k}\right\} < \alpha''_{i_1\dots i_k},$$

то, приняв во внимание (21), мы получим

$$|A'''_{i_1\dots i_k0}| < |A'_{i_1\dots i_k}\alpha'_{i_1\dots i_k} + A''_{i_1\dots i_k}\alpha''_{i_1\dots i_k}| = |A_{i_1\dots i_k}|,$$

т. е. то, что требовалось.

Поэтому остается изучить этот случай при одновременном выполнении равенств

$$\alpha'_{i_1 \ldots i_k} = \{\alpha'_{i_1 \ldots i_k}\}, \quad \alpha''_{i_1 \ldots i_k} = \{\alpha''_{i_1 \ldots i_k}\}. \tag{29}$$

Эти равенства в соединении с (26) эквивалентны одному

$$\alpha'_{i_1 \ldots i_k} + \alpha''_{i_1 \ldots i_k} = 1. \tag{30}$$

Применяя формулы (15), получаем

$$\alpha'''_{i_1 \ldots i_k 0} = \frac{1}{\alpha'_{i_1 \ldots i_k}}, \quad \alpha'_{i_1 \ldots i_k 0} = \frac{\alpha''_{i_1 \ldots i_k}}{\alpha'_{i_1 \ldots i_k}};$$

далее

$$\alpha'_{i_1 \ldots i_k 0} = \left[\frac{\alpha''_{i_1 \ldots i_k}}{\alpha'_{i_1 \ldots i_k}}\right] + \frac{1}{\alpha'''_{i_1 \ldots i_k 00}}, \quad \alpha'''_{i_1 \ldots i_k 0} = \left[\frac{1}{\alpha'_{i_1 \ldots i_k}}\right] + \frac{\alpha''_{i_1 \ldots i_k 00}}{\alpha'''_{i_1 \ldots i_k 00}}.$$

Но в виду (30)

$$1 + \alpha'_{i_1 \ldots i_k 0} = \alpha'''_{i_1 \ldots i_k 0}, \quad 1 + [\alpha'_{i_1 \ldots i_k 0}] = [\alpha'''_{i_1 \ldots i_k 0}]$$

и потому

$$\alpha''_{i_1 \ldots i_k 00} = 1, \text{ т. е. } \alpha'_{i_1 \ldots i_k 000} = 0.$$

Значит $[\alpha'_{i_1 \ldots i_k 000}] = \alpha'_{i_1 \ldots i_k 000}$ и алгорифм нарушается на $k+4$-ом шагу. Чтобы допущение, что алгорифм остается ненарушимым до m-го шага, оставалось в силе, надо поэтому считать условия (26) и (29) невыполнимыми одновременно при $k = 0, 1, 2, \ldots, m-4$.

Таким образом неравенство (23) с необходимостью вытекает из указанного допущения.

Образуем теперь новую систему чисел

$$B_1, B_2, \ldots, B_{m+1}$$

следующим образом. Положим

$$B_1 = |A|, \quad B_2 = |A'|, \quad B_3 = |A''|, \quad B_4 = |A'''|.$$

В качестве B_5 мы возьмем $\min(|A'''_0|, |A'''_1|)$. Если этот minimum дает число A'''_0, то мы положим $B_6 = \min(|A'''_{00}|, |A'''_{01}|)$, в противном случае $B_6 = \min(|A'''_{10}|, |A'''_{11}|)$.

Вообще, если число B_k уже определено, мы положим

$$B_{k+1} = \min(|A'''_{i_1 \ldots i_{k-4} 0}|, |A'''_{i_1 \ldots i_{k-4} 1}|),$$

где последовательность $i_1, i_2, \ldots, i_{k-4}$ как раз та, которая определила число B_k, т. е.

$$B_k = |A'''_{i_1 \ldots i_{k-4}}| = \min(|A'''_{i_1 \ldots i_{k-5} 0}|, |A'''_{i_1 \ldots i_{k-5} 1}|).$$

Рассмотрим пять последовательных чисел B_{k+1}, B_{k+2}, B_{k+3}, B_{k+4}, B_{k+5}. Благодаря формулам (19) мы имеем

$$\begin{aligned}
B_{k+1} &= |A'''_{i_1 \ldots i_{k-3}}| = |A''_{i_1 \ldots i_{k-2}}| = |A'_{i_1 \ldots i_{k-1}}| = |A_{i_1 \ldots i_k}|, \\
B_{k+2} &= |A'''_{i_1 \ldots i_{k-2}}| = |A''_{i_1 \ldots i_{k-1}}| = |A'_{i_1 \ldots i_k}|, \\
B_{k+3} &= |A'''_{i_1 \ldots i_{k-1}}| = |A''_{i_1 \ldots i_k}|, \\
B_{k+4} &= |A'''_{i_1 \ldots i_k}|, \\
B_{k+5} &= \min(|A'''_{i_1 \ldots i_k 0}|, |A'''_{i_1 \ldots i_k 1}|).
\end{aligned}$$

Значит, неравенство (23) приводит нас к условию

$$\max(B_{k+1}, B_{k+2}, B_{k+3}, B_{k+4}) > B_{k+5}, \; k=0, 1, \ldots, m-4. \qquad (31)$$

Если мы теперь положим

$$\max(B_{4i+1}, B_{4i+2}, B_{4i+3}, B_{4i+4}) = M_i, \; i=0, 1, \ldots, M_0, \; M_{M_0+1}=B_{m+1},$$

то из (31) без труда заключим, что

$$M_i > M_{i+1}.$$

Отсюда цепь неравенств

$$M_0 > M_1 > \ldots > M_{M_0} > M_{M_0+1}.$$

Но подобная цепь неравенств для целых неотрицательных M_i существовать не может, так как количество этих чисел есть M_0+2, тогда как наибольшее из них M_0.

Итак, мы пришли к противоречию, устраняющему допущение, чем теорема и доказана.

Замечание 1. В силу теоремы IV и с помощью рассуждений теоремы III мы приходим к выводу, что если для чисел $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ существуют такие целые A, A', A'', A''', что $A+A'\alpha'+A''\alpha''+A'''\alpha'''=0$, то эти числа могут быть построены с помощью разветвленного алгорифма.

Замечание 2. Если числа $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ линейно зависимы и числа A, A', A'', A''' заранее известны, то для того чтобы достичь шага, нарушающего разветвленный алгорифм, нет надобности применять весь алгорифм целиком, а достаточно следовать лишь по одной его «ветви». В этом случае надо, получив из исходной тройки (α) две следующих $(\alpha)_0$ и $(\alpha)_1$, далее применять алгорифм лишь к одной из них, именно к той $(\alpha)_{i_1}$, которая отвечает меньшему из чисел $|A_0'''|$, $|A_1'''|$. После этого достаточно применять алгорифм только к той из вновь получающихся троек $(\alpha)_{i_10}$, $(\alpha)_{i_11}$, которая отвечает меньшему из чисел $|A_{i_10}'''|$, $|A_{i_11}'''|$, и т. д. С помощью рассуждений теоремы IV легко установить, что, следуя вдоль такой ветви алгорифма, мы с необходимостью придем к ее нарушению.

Замечание 3. Теоремы III и IV позволяют утверждать следующее:

Вещественное число α является иррациональностью степени не выше третьей в том и только в том случае, если примененный к числам $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$ разветвленный алгорифм Якоби нарушается.

Ленинградский гос. университет.

Поступило
7. X. 1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Jacobi C. G. J., Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird, Journal für die reine und angew. Mathematik, B. 69, 1868.

[2] Perron O., Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus. Mathem. Annalen, B. 64, 1907.

M. ARTIOUKHOV. ON A PROPERTY OF JACOBI'S ALGORITHM

SUMMARY

As is well known, the algorithm of continued fractions applied to a rational (irrationality of the first degree) number α must break up at a certain «step». In the present paper I show that the so-called «branched» Jacobi's algorithm characterizes every irrationality of less than fourth degree in a similar way.

As a preliminary I establish the following theorems.

THEOREM I. *If for the numbers α', α'', $0 \leqslant \alpha'$, $1 < \alpha''$ there exist three integers A, A', A'' such that*

$$A + A'\alpha' + A''\alpha'' = 0$$

and

$$\max(|A|, |A'|, |A''|) = M > 0,$$

then Jacobi's algorithm of the second order applied to the numbers α', α'' must break up at the k-th step, where $k \leqslant 3M$.

THEOREM II. *If for the real numbers α', α'' there exist three integers A, A', A'' such that*

$$A + A'\alpha' + A''\alpha'' = 0$$

and

$$\max(|A'|, |A''|) = M > 0,$$

*then Jacobi's algorithm of the second order «proceeding by the nearest integers» * applied to the numbers α', α'' must break up at the k-th step, where $k \leqslant 2M + 2$.*

Further I construct two examples which prove that the condition

$$A + A'\alpha' + A''\alpha'' + A'''\alpha''' = 0$$

does not lead to a breaking up of the ordinary Jacobi's algorithm (as well as of Jacobi's algorithm proceeding by the nearest integers) of the third order applied to α', α'', α'''.

After this I return to the «branched» Jacobi's algorithm. It proceeds as follows.

Let three real numbers α', α'', α''' be given. We put

$$q_0' = [\alpha'], \qquad q_0'' = [\alpha''], \qquad q_0''' = [\alpha'''],$$
$$q_1' = [\alpha'] + 1, \ q_1'' = [\alpha''] + 1, \ q_1''' = [\alpha'''] + 1,$$

and construct two new triplets α_0', α_0'', α_0''' and α_1', α_1'', α_1''' by means of the formulae

$$\alpha' = q_0' + \frac{1}{\alpha_0'''}, \ \alpha'' = q_0'' + \frac{\alpha_0'}{\alpha_0'''}, \ \alpha''' = q_0''' + \frac{\alpha_0''}{\alpha_0'''},$$
$$\alpha' = q_1' - \frac{1}{\alpha_1'''}, \ \alpha'' = q_1'' - \frac{\alpha_1'}{\alpha_1'''}, \ \alpha''' = q_1''' - \frac{\alpha_1''}{\alpha_1'''}.$$

* Jacobi's algorithm is called «proceeding by the nearest integers», if the nearest integers are used for the incomplete quotients instead of the entiers.

This is the first step of the branched Jacobi's algorithm applied to the triplet α', α'', α'''. At the second step each of the obtained triplets gives two new triplets in a similar way. At the third step from four new triplets we come to the next eight, etc.

If this algorithm can be continued up to the $(k-1)$-th step inclusively, but one triplet of this step is such that its first number is an integer, we say that the algorithm break up at the k-th step.

In the present paper I prove the following theorems concerning the branched algorithm:

THEOREM III. *If the branched algorithm applied to the numbers* α', α'', α''' *breaks up, then there exist four integers* A, A', A'', A''', *which are not simultaneously zero, such that* $A+A'\alpha'+A''\alpha''+A'''\alpha'''=0$.

THEOREM IV. *If for the numbers* α', α'', α''', $0 \leqslant \alpha'$, $0 \leqslant \alpha''$, $1 < \alpha'''$, *there exist four integers* A, A', A'', A''' *such that*

$$A+A'\alpha'+A''\alpha''+A'''\alpha'''=0$$

and

$$\max(|A|, |A'|, |A''|, |A'''|)=M>0,$$

then the branched algorithm applied to the numbers α', α'', α''' *must break up at the* k*-th step, where* $k \leqslant 4M+4$.

The integers A, A', A'', A''' (if they exist) can be found by means of the branched algorithm.

Using the theorems III and IV we come to the following

Conclusion: *The real number* α *is an irrationality of less than fourth degree, if the branched Jacobi's algorithm applied to the numbers* α. α^2, α^3 *breaks up.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

В. А. ЕФИМЕНКО

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе доказывается, что собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$\frac{\partial\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(q\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial y}-r\varphi+\lambda s\varphi=0;\ \varphi=0$$

на контуре Г можно аппроксимировать с любой степенью точности собственными значениями и собственными функциями соответствующего разностного уравнения с граничным условием $\varphi^{(h)}=0$ на контуре Γ_h, аппроксимирующем Г.

I

Для приближенного численного решения краевой задачи дифференциального уравнения часто бывает удобно перейти к уравнению в конечных разностях. Собственные значения и собственные функции такой краевой задачи разностного уравнения рассматриваются как приближенные выражения для собственных значений и собственных функций краевой задачи дифференциального уравнения. При этом возникает вопрос, можно ли при достаточно малом шаге разности h аппроксимировать с любой точностью собственные значения и собственные функции дифференциального уравнения.

Цель настоящей работы — доказать возможность такой аппроксимации для краевой задачи

$$\frac{\partial\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(q\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial y}-r\varphi+\lambda s\varphi=0,\ \varphi=0,$$

на контуре Г односвязной области G плоскости (x, y). Контур Г полагаем состоящим из конечного числа дуг кривых с непрерывно вращающимися касательными *.

* Для прямоугольного контура возможность такой аппроксимации доказана Ричардсоном (1), причем примененный нами способ доказательства в корне отличается от способа Ричардсона.

Работа основана на результатах, полученных Курантом.

В статье Куранта [2] доказано, что собственные значения и собственные функции дифференциального уравнения типа Штурм-Лиувилля с однородными граничными условиями можно получить путем предельного перехода из собственных значений и собственных функций соответствующего разностного уравнения с соответствующими граничными условиями. При этом Курант считает, что метод, примененный им, нельзя распространить на случай двух независимых переменных. По мнению Куранта, такое обобщение может быть сделано на основе другой его работы [3], где доказывается возможность предельного перехода к решению уравнения Лапласа от решения соответствующего разностного уравнения.

Об уравнении Лапласа идет речь и в работе Куранта, Фридерикса и Леви [4], где есть указание, что полученные результаты можно развить и для уравнения

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\lambda\varphi=0$$

и даже для уравнений более общего вида.

Решению этой задачи и посвящена настоящая работа. Приношу глубокую благодарность проф. Д. Ю. Панову за помощь, оказанную при выполнении этой работы.

II. Постановка задачи

Пусть требуется определить собственные значения и собственные функции дифференциального уравнения

$$\frac{\partial\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(q\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial y}-r\varphi+\lambda s\varphi=0, \tag{1}$$

где

$$\begin{gathered}0<p\leqslant p(x,y)\leqslant P,\\ 0<q\leqslant q(x,y)\leqslant Q,\\ 0<r\leqslant r(x,y)\leqslant R,\\ 0<s\leqslant s(x,y)\leqslant S\end{gathered}$$

(такие же ограничения налагаются на частные производные по x и y от функций p, q, r, s до 3-го порядка включительно) с граничным условием

$$\varphi=0 \tag{2}$$

на контуре Γ некоторой области G плоскости (x, y).

Заменив производные отношениями конечных разностей, мы получим вместо дифференциального уравнения (1) с граничным условием (2) разностное уравнение

$$(p^{(h)}\varphi_x)_{\bar{x}}+(q^{(h)}\varphi_y)_{\bar{y}}-r^{(h)}\varphi^{(h)}+\lambda^{(h)}s^{(h)}\varphi^{(h)}=0 \tag{1'}$$

с граничным условием

$$\varphi^{(h)}=0 \tag{2'}$$

на контуре Γ_h, аппроксимирующем Γ.

Здесь

$$\varphi_x = \frac{\varphi(x+h, y) - \varphi(x, y)}{h}, \quad \varphi_y = \frac{\varphi(x, y+h) - \varphi(x, y)}{h},$$

$$(p^{(h)}\varphi_x)_{\bar{x}} = \frac{p^{(h)}(x, y)\cdot\varphi_x(x, y) - p^{(h)}(x-h, y)\cdot\varphi_x(x-h, y)}{h}$$

$$(q^{(h)}\varphi_y)_{\bar{y}} = \frac{q^{(h)}(x, y)\cdot\varphi_y(x, y) - q^{(h)}(x, y-h)\cdot\varphi_y(x, y-h)}{h}.$$

Докажем, что собственные значения и собственные функции краевой задачи (1), (2) можно аппроксимировать с любой точностью собственными значениями и собственными функциями краевой задачи (1′), (2′).

Краевая задача (1), (2) равносильна следующей вариационной задаче:

Среди всех функций φ, обращающихся в 0 на Γ, найти такую функцию $\varphi = u(x, y)$, которая обращает в minimum интеграл

$$D[\varphi] = \iint\limits_G \left[p\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + q\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + r\varphi^2\right]dxdy \tag{3}$$

при условии, что

$$H[\varphi] = \iint\limits_G s\varphi^2 dxdy = 1. \tag{4}$$

Вместо того чтобы искать minimum $D[\varphi]$ при условии $H[\varphi] = 1$, можно, отбросив это условие, искать minimum отношения $\frac{D[\varphi]}{H[\varphi]}$; решения при этом будут совпадать с точностью до постоянного множителя. Функция $\frac{D[\varphi]}{H[\varphi]}$ ограничена снизу. Это следует из леммы, доказанной Курантом [(5), стр. 13], и из дефинитности $H[\varphi]$. Обозначим нижнюю грань $\frac{D[\varphi]}{H[\varphi]}$ через λ. Образуем квадратичные формы

$$D_h[\varphi] = h^2 \sum\sum_{G_h} (p^{(h)}\varphi_x^2 + q^{(h)}\varphi_y^2 + r^{(h)}\varphi^{(h)^2}) \xrightarrow[h\to 0]{} D[\varphi],$$

$$H_h[\varphi] = h^2 \sum\sum_{G_h} s^{(h)}\varphi^{(h)^2} = 1 \xrightarrow[h\to 0]{} H[\varphi].$$

Функция $\frac{D_h[\varphi]}{H_h[\varphi]}$, как и всякая непрерывная функция, достигает minimum'а на ограниченном замкнутом множестве. Пусть среди всех функций, обращающихся в 0 на Γ_h, $u^{(h)}$ будет такой функцией, которая обращает в minimum $\frac{D_h[\varphi]}{H_h[\varphi]}$, т. е. $\frac{D_h[u]}{H_h[u]} = \lambda^{(h)}$.

Другими словами, $\lambda^{(h)}$ — первое (наименьшее) собственное значение краевой задачи (1′), (2′), $u^{(h)}$ — первое собственное решение этой краевой задачи. Наша цель—доказать, что при $h \to 0$ последовательность

$$u_{h_1}, u_{h_2}, u_{h_3}, \ldots, u_{h_n}, \ldots \tag{5}$$

сходится к функции u такой, что

$$\frac{D[u]}{H[u]} = \lambda,$$

т. е. такой функции u, что $\frac{D[\varphi]}{H[\varphi]}$ при $\varphi = u$ достигает нижней грани. Ход доказательства будет тот же, что у Куранта * при доказательстве аналогичного положения для случая одного независимого переменного. А именно докажем,

1) что нижний предел последовательности

$$\lambda_{h_1}, \lambda_{h_2}, \lambda_{h_3}, \ldots, \lambda_{h_n}, \ldots \tag{6}$$

не больше λ, $\underline{\lim}_{h\to 0} \lambda_h = \underline{\lambda} \leqslant \lambda$ (дальше будет показано, что $\underline{\lambda} = \lambda$);

2) что из последовательности собственных функций краевой задачи (1′), (2′)

$$u_{h_1}, u_{h_2}, u_{h_3}, \ldots, u_{h_n}, \ldots$$

можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно по x и y к предельной функции $u(x, y)$ в каждой внутренней к G области;

3) что эта предельная функция и дает первое собственное значение краевой задачи (1), (2).

III. Доказательство

1° Так как λ — нижняя грань $\frac{D[\varphi]}{H[\varphi]}$, то существует такая функция φ, для которой

$$\lambda \leqslant \frac{D[\varphi]}{H[\varphi]} < \lambda + \varepsilon.$$

Так как

$$D_h[\varphi] \underset{h\to 0}{\longrightarrow} D[\varphi],$$

$$H_h[\varphi] \underset{h\to 0}{\longrightarrow} H[\varphi],$$

то для достаточно малого h

$$\left| \frac{D_h[\varphi]}{H_h[\varphi]} - \frac{D[\varphi]}{H[\varphi]} \right| < \varepsilon.$$

Отсюда

$$\frac{D_h[\varphi]}{H_h[\varphi]} < \frac{D[\varphi]}{H[\varphi]} + \varepsilon < \lambda + 2\varepsilon.$$

Но в виду того что $\lambda^{(h)}$ есть $\min \frac{D_h[\varphi]}{H_h[\varphi]}$,

$$\lambda^{(h)} \leqslant \frac{D_h[\varphi]}{H_h[\varphi]}$$

и

$$\lambda^{(h)} < \lambda + 2\varepsilon.$$

Это неравенство имеет место для всех достаточно малых h.

$\lambda^{(h)}$ не может быть отрицательной величиной ни при каком значении h, так как $\lambda^{(h)}$ — minimum положительного выражения $\frac{D_h[\varphi]}{H_h[\varphi]}$. Следовательно, для достаточно малых h имеем

$$0 \leqslant \lambda^{(h)} < \lambda + \varepsilon.$$

---

* См. ([2]), стр. 49—60.

Таким образом для наименьшего из пределов последовательности (6) будем иметь

$$\lim_{h\to 0} \lambda^{(h)} = \underline{\lambda} \leqslant \lambda.$$

2° Сначала докажем, что семейство функций $u^{(h)}$ и их разности по x и y ограничены и «равностепенно» непрерывны в смысле Куранта * в каждой области, целиком лежащей внутри G. Курантом доказано **, что

$$|u(P) - u(Q)| \leqslant \frac{1}{b}\sqrt{2ab}\sqrt{h^2\sum\sum u_x^2} + \sqrt{2ab}\sqrt{h^2\sum\sum u_{xy}^2},$$

где P и Q — точки, лежащие на линии, параллельной оси x и отстоящие друг от друга на расстоянии a; величину b можно зафиксировать для каждой области G_h^*, лежащей внутри G_h. Суммирование производится по области, лежащей внутри G_h.

Если доказать, что суммы в правой части неравенства ограничены постоянными, не зависящими от h, то разность $u(P) - u(Q)$ будет стремиться к нулю одновременно с a независимо от h. Тем самым будет доказана «равностепенная» непрерывность семейства функций $u^{(h)}$ в направлении оси x.

Переходим к доказательству ограниченности $h^2\sum\sum u_x^2$ и $h^2\sum\sum u_{xy}^2$.

$h^2\sum\sum u^{(h)^2}$ — величина ограниченная, так как

$$1 = h^2\sum\sum r^{(h)} u^{(h)^2} \geqslant h^2 r\sum\sum u^{(h)^2};$$

$$h^2\sum\sum u^{(h)^2} \leqslant \frac{1}{r}.$$

Из ограниченности $h^2\sum\sum u^{(h)^2}$ выведем ограниченность $h^2\sum\sum u_x^2$ и $h^2\sum\sum u_{xy}^2$.

Предварительно докажем, что

$$h^2\sum\sum (p^{(h)} u_x^2 + q^{(h)} u_y^2) \leqslant c_1 h^2\sum\sum u^{(h)2},$$

где c_1 — постоянная величина, не зависимая от h.

Рассмотрим

$$h^2\sum_{Q_1}\sum (p^{(h)} u_x^2 + q^{(h)} u_y^2),$$

где суммирование распространяется по всем внутренним точкам квадрата Q_1 с границей $S_1 = ABCD$ (фиг. 1). Обозначим через u_0 значение функции во внутренней точке квадрата и через u_1, u_2, u_3, u_4 — в четырех соседних точках, расположенных в таком порядке, как указано на чертеже. Тогда

$$h^2\sum_{Q_1}\sum (pu_x^2 + qu_y^2) = \sum_{Q_1}\sum [p_0(u_1 - u_0)^2 + q_0(u_2 - u_0)^2] \ ***.$$

* Курант называет семейство функций $u^{(h)}$, определенное в точках сетки шага h, равностепенно непрерывным в области G_h, если $|u^{(h)}(P_1) - u^{(h)}(P_2)| < \varepsilon$, коль скоро точки P_1 и P_2 в области G_h отстоят друг от друга меньше, чем на δ для всех h.

** См. ([4]), стр. 47—52.

*** Здесь и в дальнейшем опускаем индекс h у $u^{(h)}$, $p^{(h)}$, $q^{(h)}$, $r^{(h)}$, $s^{(h)}$.

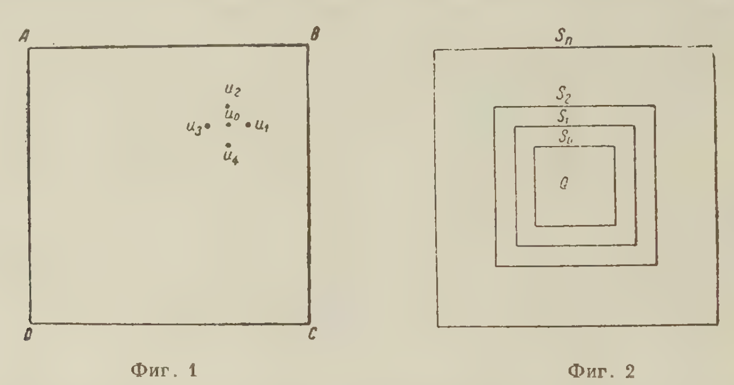
Разобьем $\sum\limits_{Q_1}\sum p_0(u_1-u_0)^2$ на две части, а именно:

$$\sum_{Q_1}\sum p_0(u_1-u_0)^2=\sum_{Q_1}\sum(p_0u_0^2-p_0u_0u_1)+\sum_{Q_1}\sum(p_0u_1^2-p_0u_0u_1). \quad (7)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\sum_{Q_1}\sum(p_0u_1^2-p_0u_0u_1)=\sum_{Q_1}\sum(p_3u_0^2-p_3u_0u_3)+\sum_{BC^*}(\bar{p}u^2-\bar{p}u\bar{u})-$$
$$-\sum_{AD^*}(p\bar{u}^2-pu\bar{u}), \quad (8)$$

где через $\bar{p}$ и $\bar{u}$ обозначены значения p и u, соответствующие точкам, находящимся на шаг отступя внутрь от контура $S_1=ABCD$. Суммиро-



Фиг. 1 Фиг. 2

вание по BC^* и AD^* означает суммирование по всем точкам сетки, лежащим на прямых BC и AD, кроме точек B, C, A, D.

Принимая во внимание, что

$$\sum_{Q_1}\sum(p_0u_0-p_0u_0u_1+p_3u_0^2-p_3u_0u_3)=-h^2\sum_{Q_1}\sum u(pu_x)_{\bar{x}},$$

получим из (7) и (8) следующее соотношение:

$$\sum_{Q_1}\sum p_0(u_1-u_0)^2=-h^2\sum_{Q_1}\sum u\,(pu_x)_{\bar{x}}+\sum_{BC^*}\bar{p}u(u-\bar{u})+\sum_{AD^*}p\bar{u}\,(u-\bar{u}).$$

Сделав такие же преобразования с $\sum\limits_{Q_1}\sum q_0\,(u_2-u_0)^2$, получим формулу, сходную с формулой Грина:

$$h^2\sum_{Q_1}\sum(pu_x^2+qu_y^2)=-h^2\sum_{Q_1}\sum u\left[(pu_x)_{\bar{x}}+(qu_y)_{\bar{y}}\right]+\sum_{BC^*}\bar{p}u(u-\bar{u})+$$
$$+\sum_{AD^*}p\bar{u}(u-\bar{u})+\sum_{AB^*}\bar{q}u(u-\bar{u})+\sum_{CD^*}q\bar{u}(u-\bar{u}). \quad (9)$$

Рассмотрим ряд концентрических квадратов $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ с границами $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$ (фиг. 2), лежащих в области G. Очевидно,

$$h^2\sum_{Q_0}\sum(pu_x^2+qu_y^2)\leqslant h^2\sum_{Q_1}\sum(pu_x^2+qu_y^2)$$

и поэтому нетрудно убедиться в справедливости следующего неравенства:

$$h^2\sum_{Q_0}\sum (pu_x^2+qu_y^2)\leqslant 2h^2\sum_{Q_1}\sum (pu_x^2+qu_y^2)+\sum_{AD^*}[p(u-\bar u)^2+p\bar u^2-\bar p\bar u^2]+$$
$$+\sum_{CD^*}[q(u-\bar u)^2+q\bar u^2-\bar q\bar u^2]-\sum_{BC^*}[\bar p(u-\bar u)^2+\bar pu^2-pu^2]-$$
$$-\sum_{AB^*}[\bar q(u-\bar u)^2+\bar qu^2-qu^2]. \qquad (10)$$

Принимая во внимание (9), преобразуем неравенство (10) к виду

$$h^2\sum_{Q_0}\sum (pu_x^2+qu_y^2)\leqslant -2h^2\sum_{Q_1}\sum u\,[(pu_x)_{\bar x}+(qu_y)_{\bar y}]+\sum_{S_1}{}_q^p\,u^2-\sum_{S_0}{}_q^p\,u^2.$$

В двух последних суммах берем каждый раз p для точек, находящихся на прямых BC и AD и q — на прямых AB и CD. В предпоследней сумме следовало бы производить суммирование по

$$S_1^*=AB^*+BC^*+CD^*+AD^*,$$

но от замены S_1^* на S_1 последнее неравенство лишь усилится. Аналогичные неравенства можно получить для любого из концентрических квадратов $Q_2, Q_3, \ldots, Q_n$:

$$h^2\sum_{Q_0}\sum (pu_x^2+qu_y^2)\leqslant$$
$$\leqslant -2h^2\sum_{Q_{k+1}}\sum u\,[(pu_x)_{\bar x}+(qu_y)_{\bar y}]+\sum_{S_{k+1}}{}_q^p\,u^2-\sum_{S_k}{}_q^p\,u^2,\quad 0\leqslant k<n.$$

Складывая n последних неравенств, получим

$$nh^2\sum_{Q_0}\sum (pu_x^2+qu_y^2)\leqslant -2h^2\sum_{k=0}^{n-1}\Big\{\sum_{Q_{k+1}}\sum u\,[(pu_x)_{\bar x}+(qu_y)_{\bar y}]\Big\}+$$
$$+\sum_{S_n}{}_q^p\,u^2-\sum_{S_0}{}_q^p\,u^2\leqslant 2h^2\sum_{k=0}^{n-1}\Big\{\sum_{Q_{k+1}}\sum |u|(\lambda s|u|+r|u|)\Big\}+\sum_{S_n}{}_q^p\,u^2\leqslant$$
$$\leqslant 2nh^2c_2\sum_{Q_n}\sum u^2+c_3\sum_{S_n}u^2, \qquad (11)$$

где $c_2=\lambda s+r$, $c_3=\max\{P, Q\}$.

Неравенство (11) имеет место для всех достаточно малых h. Суммируя неравенства (11) от $n=1$ до $n=N$, получим

$$\frac{1+N}{2}Nh^2\sum_{Q_0}\sum (pu_x^2+qu_y^2)\leqslant (1+N)Nc_2h^2\sum_{Q_N}\sum u^2+c_3\sum_{Q_N}\sum u^2$$

или

$$N^2h^2\sum_{Q_0}\sum (pu_x^2+qu_y^2)\leqslant c_2(1+N)^2h^2\sum_{Q_N}\sum u^2+2c_3\sum_{Q_N}\sum u^2.$$

При $h\to 0$ Q_0 и Q_N будут стремиться к двум концентрическим квадратам, лежащим в области G с расстоянием $a_1=\lim Nh$. Получаем

$$h^2\sum_{Q_0}\sum (pu_x^2+qu_y^2)\leqslant c_1h^2\sum_{Q_N}\sum u^2,$$

где $c_1 = c_2 + \frac{2c_3}{a_1^2}$ — постоянная, не зависящая от h. Это неравенство верно не только для двух квадратов, но и для любых двух областей, входящих в G так, что одна целиком лежит внутри другой.

По условию $p(x, y) \geqslant p > 0$; $q(x, y) \geqslant q > 0$.

Обозначив $\min\{p, q\}$ через m, имеем

$$h^2 \sum_{G_h}\sum (pu_x^2 + qu_y^2) \geqslant mh^2 \sum_{G_h}\sum (u_x^2 + u_y^2). \tag{12}$$

Тогда, принимая во внимание (12), получаем

$$h^2 \sum_{G_h^*}\sum (u_x^2 + u_y^2) \leqslant c_4 h^2 \sum_{G_h}\sum u^2, \tag{13}$$

где $c_4 = \frac{c_1}{m}$ — постоянная, не зависящая от h.

Для доказательства «равностепенной» непрерывности $u^{(h)}$ остается показать, что $h^2 \sum\sum u_{xy}^2$ будет ограниченной и при $h \to 0$.

Докажем, что если $u^{(h)}$ удовлетворяет уравнению

$$(pu_x)_{\bar{x}} + (qu_y)_{\bar{y}} - ru + \lambda su = 0, \tag{1'}$$

то u_x удовлетворяет уравнению

$$[p_x u_{xx}]_{\bar{x}} + [q_x u_{xy}]_{\bar{y}} - r_x u_x + \lambda s_x u_x = 0, \tag{14}$$

т. е. уравнению того же вида, что (1′), где лишь p, q, r, s заменены соответственно p_x, q_x, r_x, s_x.

Взяв разность по x от уравнения (1′), получаем

$$(pu_x)_{x\bar{x}} + (qu_y)_{x\bar{y}} - (ru)_x + \lambda (su)_x = 0. \tag{15}$$

Но уравнение (15), в виду (1′), равносильно уравнению

$$(pu_{xx})_{\bar{x}} + (qu_{xy})_{\bar{y}} - ru_x + \lambda su_x + \frac{1}{h}\left\{[p(x+h, y)\, u_x]_{\bar{x}} + \right.$$
$$\left. + [q(x+h, y)\, u_y]_{\bar{y}} - r(x+h, y)\, u + \lambda s(x+h, y)\, u\right\} = 0. \tag{16}$$

Принимая во внимание (1′), можем из (15) получить также уравнение

$$[p(x+h, y)\, u_x(x+h, y)]_{\bar{x}} + [q(x+h, y)\, u_y(x+h, y)]_{\bar{y}} -$$
$$- r(x+h, y)\, u(x+h, y) + \lambda s(x+h, y)\, u(x+h, y) = 0. \tag{17}$$

Вычтем из (17) и прибавим к нему

$$[p(x+h, y)\, u_x]_{\bar{x}} + [q(x+h, y)\, u_y]_{\bar{y}} - r(x+h, y)\, u + \lambda s(x+h, y)\, u.$$

Получим

$$[p(x+h, y)\, u_{xx}]_{\bar{x}} + [q(x+h, y)\, u_{xy}]_{\bar{y}} - r(x+h, y)\, u_x +$$
$$+ \lambda s(x+h, y)\, u_x + \frac{1}{h}\left\{[p(x+h, y)\, u_x]_{\bar{x}} + \right.$$
$$\left. + [q(x+h, y)\, u_y]_{\bar{y}} - r(x+h, y)\, u + \lambda s(x+h, y)\, u\right\} = 0. \tag{18}$$

Из (18) вычтем (16); получим (14)

$$[p_x u_{xx}]_{\bar{x}} + [q_x u_{xy}]_{\bar{y}} - r_x u_x + \lambda s_{xy} u_x = 0,$$

что и требовалось доказать.

Точно так же можно доказать, что u_y будет удовлетворять уравнению

$$(p_y u_{yx})_{\bar{x}} + (q_y u_{yy})_{\bar{y}} - r_y u_y + \lambda s_y u_y = 0.$$

Но тогда из (13), принимая во внимание ограничения, накладываемые на производные функций p, q, r, s, имеем

$$h^2 \sum\sum (u_{xx}^2 + u_{xy}^2) \leqslant c_4 h^2 \sum\sum u_x^2,$$
$$h^2 \sum\sum (u_{yx}^2 + u_{yy}^2) \leqslant c_4 h^2 \sum\sum u_y^2.$$

Сложив два последние неравенства, получим

$$h^2 \sum\sum (u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + 2u_{xy}^2) \leqslant c_4 h^2 \sum\sum (u_x^2 + u_y^2)$$

и ограниченность $h^2 \sum\sum u_{xy}^2$ доказана.

Разности по x и y функции $u^{(h)}$ будут также «равностепенно» непрерывными функциями, так как каждая из них удовлетворяет разностному уравнению такого же вида, что и $u^{(h)}$. Ограниченность $u^{(h)}$ следует из ограниченности $h^2 \sum\sum u^{(h)^2}$ и «равностепенной» непрерывности $u^{(h)}$. Точно так же можно установить ограниченность разностей функции $u^{(h)}$. Теперь можно утверждать, что из последовательности (5) можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся в каждой внутренней к G_h области равномерно по x и y и что

3° предельная функция будет удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial\left(p\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(q\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} - ru + \lambda su = 0.$$

Доказательство того, что будут выполнены краевые условия, проводится точно по Куранту*. Из формулы (16) Куранта (стр. 54), используя ограниченность $h^2 \sum\sum (u_x^2 + u_y^2)$, получаем стремление к нулю интеграла

$$\frac{1}{r}\iint\limits_{S_r} (u-f)^2\, dx\, dy$$

при $r \longrightarrow 0$ (через S_r здесь обозначена полоса шириною r, идущая вдоль Γ, через f — значения u на контуре; у нас $f = 0$), а отсюда (стр. 48, сноска 15 статьи Куранта) и обращение в нуль функции u на контуре. Другими словами, доказано, что среди функций, обращающихся в нуль на Γ, предельная функция $u(x, y)$ будет такая, что

$$\frac{D[u(x, y)]}{H[u(x, y)]} = \underline{\lambda}.$$

Но для любого φ

$$\frac{D[\varphi]}{H[\varphi]} \geqslant \lambda,$$

так как λ — нижняя грань $\dfrac{D[\varphi]}{H[\varphi]}$.

* См. ([4]) стр. 52—54

Следовательно,

$$\frac{D[u]}{H[u]} = \underline{\lambda} \geqslant \lambda.$$

В разделе 1° было доказано, что

$$\underline{\lambda} \leqslant \lambda,$$

следовательно,

$$\underline{\lambda} = \lambda.$$

Таким образом доказана возможность аппроксимации для первого собственного значения и первой собственной функции краевой задачи (1), (2).

Обозначим через λ_2 второе собственное значение и через u_2 вторую собственную функцию нашей краевой задачи. Тогда их определение сводится к решению вариационной задачи: среди всех функций φ, обращающихся в нуль на Γ, найти такую функцию $\varphi = u_2(x, y)$, которая обращает в minimum

$$D[\varphi] = \iint\limits_G \left[p \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + q \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + r\varphi^2 \right] dxdy$$

при условиях

$$H[\varphi] = \iint\limits_G r\varphi^2 \, dxdy = 1,$$

$$H[\varphi, u_1] = \iint\limits_G r\varphi u_1 \, dxdy = 0$$

(здесь u_1 — первая собственная функция).

Доказательство возможности аппроксимации второго, а также третьего и так далее собственных значений и соответствующих собственных функций проводится так же, как и для λ_1, u_1 с небольшими изменениями, полностью совпадающими с изменениями, внесенными Курантом * в аналогичном случае для одного независимого переменного.

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академия Наук СССР.

Поступило
21.V.1938.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Richardson R. G. D., A new method in boundary problems for differential equations, Trans. of the Amer. Mathem. Society, 18, 1917.

[2] Courant R., Über die Anwendung der Variationsrechnung in der Theorie der Eigenschwingungen und über neue Klassen von Funktionalgleichungen, Acta Mathem., 49, 1926.

[3] Courant R., Über die Theorie der linearen partiellen Differenzengleichungen, Nachr. v. d. Gesellsch. der Wissensch. zu Gött., 1925.

[4] Courant R., Friedrichs K. u. Lewy H., Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik, Mathem. Ann., 100, 1928.

[5] Courant R., Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik, Mathem. Zeitschr., 7, 1920.

* См. ([2]), стр. 54—56.

V. EFIMENKO. SUR LE CALCUL APPROCHÉ DES VALEURS CARACTÉRISTIQUES ET DES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES DANS LES PROBLÈMES LIMITES DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

RÉSUMÉ

Supposons qu'il faut trouver les valeurs caractéristiques et les fonctions caractéristiques du problème limite de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(q\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-r\varphi+\lambda s\varphi=0, \qquad (1)$$

$$\varphi=0, \qquad (2)$$

sur le contour Γ d'un domaine G simplement connexe.

Nous démontrons dans le présent article que si

$$0<p\leqslant p(x,y)\leqslant P,$$
$$0<q\leqslant q(x,y)\leqslant Q,$$
$$0<r\leqslant r(x,y)\leqslant R,$$
$$0<s\leqslant s(x,y)\leqslant S,$$

et si les mêmes conditions sont imposées aux dérivées partielles des trois premiers ordres par rapport à x et à y des fonctions p, q, r, s, alors les valeurs caractéristiques et les fonctions caractéristiques du problème limite (1), (2) peuvent être évaluées avec une approximation donnée d'avance au moyen des valeurs caractéristiques et des fonctions caractéristiques de l'équation correspondante aux différences finies avec la condition limite $\varphi^{(h)}=0$ sur un contour Γ_h qui est une approximation de Γ. On suppose que le contour Γ est formé d'un nombre fini d'arcs à tangente variant d'une manière continue.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР 1938
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

СОДЕРЖАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СЕРИИ ЗА 1938 год
TABLES DES MATIÈRES DE LA SÉRIE MATHÉMATIQUE, 1938

№ 1

И. М. Виноградов. Новая оценка одной тригонометрической суммы, содержащей простые числа 3
I. Vinogradow. A new estimation of a trigonometrical sum containing primes . . . 14
И. М. Виноградов. Улучшение оценки одной тригонометрической суммы, содержащей простые числа . . . 15
I. Vinogradow. Improvement of the estimation of a trigonometrical sum containing primes 23
Н. Г. Чудаков. О плотности совокупности четных чисел, непредставимых как сумма двух нечетных простых . . 25
N. Tchudakoff. On the density of the set of even numbers which are not representable as a sum of two odd primes. 40
Ю. В. Линник. Обобщение теоремы Frobenius'а и установление связи ее с теоремой Hurwitz'а о композиции квадратичных форм 41
U. Linnik. Generalization of Frobenius theorem and its connection with Hurwitz's theorem on composition of quadratic forms 52
Л. Г. Шнирельман. О равномерных приближениях . . 53
L. Schnirelmann. Sur les approximations uniformes . . . 59
С. Л. Соболев. Об одном классе интегродифференциальных уравнений с несколькими независимыми переменными (часть II) 61
S. Soboleff. Sur une classe des équations intégrodifférentielles à plusieurs variables indépendantes 89
Д. А. Райков. О разложении законов Гаусса и Пуассона 91
D. Raikov. On the decomposition of Gauss and Poisson laws 120
Л. В. Келдыш. Об одном свойстве решет измеримых B . . 125
L. Keldych. Sur une propriété des cribles dénombrables mesurables B 133
М. Л. Франк. О приближении многоугольников уникурсальными кривыми 137
M. Frank. Über die Annäherung beliebiger Polygone mittels Unicursalkurven 159
Заседания Группы математики Академии Наук СССР 27 декабря 1937 г. 161
Conférences du Groupe mathématique de l'Académie des Sciences de l'URSS 27. XII. 1937 161

№ 2

Речь товарища И. В. СТАЛИНА на приеме в Кремле работников высшей школы 17 мая 1938 г. 167
С. Н. Бернштейн. О наилучшем приближении $|x|^p$ при помощи многочленов весьма высокой степени 169
Serge Bernstein. Sur la meilleure approximation de $|x|^p$ par des polynômes de degrés très élevés 181
И. И. Привалов. Различные классы субгармонических функций в связи с их аналитическими представлениями 191
I. Privaloff. Sur certaines classes de fonctions subharmoniques et leur représentation analytique 217

Л. В. Келдыш. Структура минимальных решет, определяющих множества измеримые *B* 221
П. Я. Полубаринова-Кочина. Об интегральном уравнении теории приливов в бассейнах постоянной глубины 249
Ш. Е. Микеладзе. О численном решении дифференциальных уравнений Лапласа и Пуассона 271
Премирование работ молодых советских математиков 293

Ludmila Keldych. Sur la structure des cribles minima pour les ensembles mesurables *B* 244
P. Poloubarinova-Kochina. On the integral equation of the theory of tides in reservoirs of constant depth . . 269
Sch. Mikeladze. Über die numerische Lösung der Differentialgleichungen von Laplace und Poisson 291
Primes aux jeunes mathematiciens sovietiques 293

№ 3

И. И. Привалов. Об одном классе субгармонических функций в связи с его аналитическим представлением . 303
А. Я. Хинчин. Теория затухающих спонтанных эффектов. 313
Д. А. Райков. О связи между центральным предельным законом теории вероятностей и законом больших чисел. . 323
А. М. Обухов. Нормальная корреляция векторов 339
П. Я. Полубаринова-Кочина. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым случаям движения грунтовой воды 371

I. Privaloff. Sur une classe de fonctions subharmoniques en rapport avec sa représentation analytique 312
A. Khintchine. Theorie der abklingenden Spontaneffekte . 322
D. Raikov. On a connection between the central limit-law of the theory of probability and the law of great numbers 337
A. Oboukhoff. Sur la corrélation normale des vecteurs . 369
P. Poloubarinova-Kochina. An application of the theory of linear differential equations to certain movements of ground water . . . 394

№ 4

И. М. Виноградов. Оценка некоторых сумм, содержащих простые числа 399
Н. С. Кошляков. О некоторых определенных интегралах, содержащих Бесселевы функции. 417
Р. О. Кузьмин. О распределении корней полиномов, связанных с квадратурами Чебышева 427
Я. Л. Геронимус. Об одной экстремальной задаче Чебышева 445
В. И. Романовский. Аналитические неравенства и статистические критерии . . . 457
В. К. Туркин. Квазинормализаторы и мономиальные представления 475
Таблицы простых делителей С. А. Хорошего 483

I. Vinogradow. Estimation of certain sums containing primes 416
N. Koshliakov. Note on certain integrals involving Bessel functions 421
R. Kuzmin. Sur la distribution des racines des polynômes dans la méthode de quadrature de Tchebycheff. 443
J. Geronimus. Sur un problème extrémal de Tchebycheff . . 455
V. Romanovsky. Analytical inequalities and statistical tests 474
W. Turkin. Quasi-normalizators and monomial representations 482
Tables of primes composed by S. Khorochiy 483

№ 5—6

| Л. Г. Шнирельман. | О функциях в нормированных алгебраически замкнутых телах . . . 487
С. Н. Бернштейн. О базе системы Чебышева 499
И. М. Виноградов. Оценки тригонометрических сумм . 505
В. И. Левин. О неравенствах. IV. К неравенству Hilbert'a-Riesz'a 525
П. Е. Дюбюк. О порядке элемента в простой группе . . 543
Л. Н. Сретенский. Об одной обратной задаче теории потенциала. 551
Е. Д. Соломенцев. О некоторых классах субгармонических функций 571
А. В. Гельфанд. Приближенное интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка 583
М. Артюхов. Об одном свойстве алгорифма Якоби . . 595
В. А. Ефименко. О приближенном вычислении собственных значений и собственных функций краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных. 613

| L. Schnirelmann.| Sur les fonctions dans les corps normés et algébriquement fermés . . . 498
Serge Bernstein. Détermination de la base d'un système de Tchebycheff 503
I. Vinogradow. Estimations of trigonometrical sums . . . 523
V. Levin. Notes on inequalities. IV. On the Hilbert-Riesz inequality 541
P. Dubuque. Sur l'ordre d'un élément dans un groupe simple 549
L. Srettensky. On the inverse problem of potential theory. 568
E. Solomentsev. On some classes of subharmonic functions. 582
A. Gelfand. Intégration approchée des systèmes d'équations différentielles ordinaires du premier ordre 593
M. Artioukhov. On a property of Jacobi's algorithm 611
V. Efimenko. Sur le calcul approché des valeurs caractéristiques et des fonctions caractéristiques dans les problèmes limites de la théorie des équations aux dérivées partielles. 623

Содержание

	Стр.
Л. Г. Шнирельман. О функциях в нормированных алгебраически замкнутых телах	487
С. Н. Бернштейн. О базе системы Чебышева	499
И. М. Виноградов. Оценки тригонометрических сумм . . .	505
В. И. Левин. О неравенствах. IV. К неравенству Hilbert'a-Riesz'a	525
П. Е. Дюбюк. О порядке элемента в простой группе	543
Л. Н. Сретенский. Об одной обратной задаче теории потенциала	551
Е. Д. Соломенцев. О некоторых классах субгармонических функций	571
А. В. Гельфанд. Приближенное интегрирование системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка	583
М. М. Артюхов. Об одном свойстве алгорифма Якоби . . .	595
В. А. Ефименко. О приближенном вычислении собственных значений и собственных функций краевых задач дифференциальных уравнений в частных производных	613
Содержание Математической серии за 1938 год	625

Sommaire

	Page
L. Schnirelmann. Sur les fonctions dans les corps normés et algébriquement fermés . . .	498
Serge Bernstein. Détermination de la base d'un système de Tchebycheff	503
I. Vinogradow. Estimations of trigonometrical sums	523
V. Levin. Notes on inequalities. IV. On the Hilbert-Riesz inequality	541
P. Dubuque. Sur l'ordre d'un élément dans un groupe simple	549
L. Srettensky. On the inverse problem of potential theory .	568
E. Solomentsev. On some classes of subharmonic functions . .	582
A. Gelfand. Intégration approchée des systèmes d'équations différentielles ordinaires du premier ordre	593
M. Artioukhov. On a property of Jacobi's algorithm	611
V. Efimenko. Sur le calcul approché des valeurs caractéristiques et des fonctions caractéristiques dans les problèmes limites de la théorie des équations aux dérivées partielles	623
Table des matières de la Série Mathématique, 1938	625

Статьи направляются в редакцию непосредственно или через действительных членов Академии Наук СССР.

Адрес редакции: Москва, Б Калужская, 67, тел. В 3-47-38.
Adresse du Bureau de [illegible]**tion:** rue Bolchaya Kaloujskaya, 67. Moscou.

Редактор серии **В. А. Толстиков** Технический редактор **Е. Шнобель**

Сдано в набор 5/X 1938 г. Подписано к печати 8/II 1939 г. Формат 70×105 см. 9 печ. л.+1 вклейка. 45 000 зн. в печ. л.
Уполн. Главлита А 721. Тираж 2 300 экз. Заказ 1416. АНИ № 885.

16-я типография треста «Полиграфкнига», Москва, Трехпрудный пер., 9.